UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO NA FORMAÇÃO INICIAL DOS PROFESSORES DOS PRIMEIROS ANOS

Lina Maria Amador Brunheira Assunção

Orientador: Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Tese especialmente elaborada para obtenção do grau de Doutor em Educação, especialidade de Didática da Matemática

2019

UNIVERSIDADE DE LISBOA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO NA FORMAÇÃO INICIAL DOS PROFESSORES DOS PRIMEIROS ANOS

Lina Maria Amador Brunheira Assunção

Orientador: Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Tese especialmente elaborada para obtenção do grau de Doutor em Educação, especialidade de Didática da Matemática

Júri:

Presidente: Doutora Cecília Galvão Couto, Professora Catedrática e membro do Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Vogais:

- Doutora Ana Paula Canavarro Teixeira, Professora Auxiliar da Escola de Ciências Sociais da Universidade de Évora;
- Doutora Maria de Lurdes Serrazina, Professora Coordenadora Aposentada da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa;
- Doutor João Pedro Mendes da Ponte, Professor Catedrático do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, orientador;
- Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos, Professora Associada com Agregação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira, Professora Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Este trabalho é financiado pelo Centro Interdisciplinar de Estudos Educacionais – referência ESEXL/IPL-CIED/2016/A12.

2019

Resumo

Este estudo tem por objetivo compreender de que forma os futuros professores e educadores de infância desenvolvem o raciocínio geométrico, a partir de uma experiência de formação que valoriza os processos de classificar, definir, generalizar e justificar através de uma abordagem exploratória. A fundamentação teórica enquadra o raciocínio geométrico no âmbito do raciocínio matemático, procurando identificar a sua especificidade a partir do papel do raciocínio espacial e dos processos referidos. O raciocínio geométrico é ainda discutido no âmbito da formação inicial de professores, perspetivando a sua natureza e orientações para o seu desenvolvimento.

O estudo apresenta-se segundo a modalidade de uma investigação baseada em design, em que a investigadora assumiu também o papel de professora. Os resultados dizem respeito ao segundo ciclo de investigação que envolveu uma turma de futuros professores e educadores de infância que frequentaram a unidade curricular de Geometria, inserida no plano de estudos da licenciatura. A recolha de dados incluiu um teste diagnóstico, entrevistas, registos áudio e vídeo das aulas e análise documental de resoluções de tarefas matemáticas. A análise de dados incide sobre os conhecimentos que as formandas revelam sobre os processos de definir, classificar e justificar generalizações, a forma como estes processos se relacionam com o raciocínio espacial e os contributos da experiência de formação para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Os resultados revelam que os processos de classificar, definir e justificar generalizações constituem desafios cognitivos elevados, que mobilizam e promovem o raciocínio geométrico, com especial destaque para o raciocínio espacial. Na sua aprendizagem há vários fatores que exercem uma influência significativa, entre os quais se destacam a compreensão do processo matemático em si mesmo, as características das figuras envolvidas, a sua conceptualização prévia e a forma como são progressivamente estruturadas pelas formandas. Relativamente à experiência de formação, destaca-se a importância de realizar tarefas que favoreçam uma estruturação geométrica completa e flexível das figuras, nomeadamente através da exploração de diferentes resoluções; promover a discussão de ideias e a negociação de significados, bem como a reflexão sobre a aprendizagem; e utilizar recursos físicos e digitais que medeiem a construção e operação com imagens e modelos mentais de objetos e relações.

Palavras-chave: Raciocínio geométrico, raciocínio espacial, estruturação, processos matemáticos, formação inicial de professores.

Abstract

This study aims to understand how K-6 prospective teachers develop geometric reasoning during a teacher education experience that promotes the processes of classifying, defining, generalizing and justifying through an exploratory approach. The theoretical framework discusses geometric reasoning within the scope of mathematical reasoning and seeks for its specificity in the role of spatial reasoning and the indicated processes. Geometric reasoning is also discussed in the context of teacher education, looking at its nature and orientations for its development.

The study is carried out as a design-based research, in which the researcher also played the role of teacher. The results relate to the second cycle of research involving a class of K-6 prospective teachers who attended a geometry course in the second year of a bachelor's degree. Data collection includes a diagnostic test, interviews, audio and video recordings of lessons and document collection of participants' records of mathematical tasks. Data analysis focuses on learners' knowledge about the processes of defining, classifying and justifying generalizations, how these processes relate to spatial reasoning and the contributions of the teacher education experience to the development of geometric reasoning.

The results show that the processes of classifying, defining and justifying generalizations represent high cognitive challenges that mobilize and promote geometric reasoning, in which spatial reasoning play an important role. Several factors influence significantly the learning of those processes, particularly the understanding of the mathematical process itself, the attributes of the geometric figures involved, their previous conceptualization and the way they are progressively structured by prospective teachers. Regarding the teacher education experience, it is important to solve tasks that favour a complete and flexible geometric structuring of the figures, namely through the production and analysis of different solving ways; to promote the discussion of ideas and the negotiation of meanings, as well as the reflection on learning; and to use physical and digital resources that mediate the construction and operation with images and mental models of objects and relationships.

Keywords: Mathematical reasoning, spatial reasoning, structuring, mathematical processes, teacher education.

Preâmbulo

No verão de 2013, tendo sido aceite para ingressar no programa de doutoramento, levei algumas leituras para férias, entre elas o livro *Understanding geometry for a changing world* (Craine & Rubenstein, 2009) que acabara de comprar. Por essa altura, já tinha anunciado os meus interesses de investigação numa carta de motivação, colocando o foco na aprendizagem das isometrias e da simetria — dois tópicos que, desde a implementação do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, mereciam uma abordagem muito diferente da realizada até então. Contudo, à medida que as leituras progrediam, fui-me sentindo interpelada por ideias que questionavam algumas das minhas práticas e davam eco às minhas preocupações sobre a formação inicial na área da geometria dos futuros educadores de infância e professores dos primeiros anos, com quem trabalhara no ano letivo anterior. Por um lado, vários artigos que li davam ênfase ao raciocínio geométrico, valorizando a sua componente visual e alguns processos muito importantes, entre eles o processo de definir que nunca tinha abordado nos diferentes contextos de ensino em que já tinha trabalhado. Por outro lado, aquelas leituras permitiram-me avançar na conceptualização do raciocínio em geometria e compreender melhor as dificuldades que reconhecia na aprendizagem dos meus alunos e formandos, apontando alguns caminhos que quis explorar.

Foi assim que se começou a desenhar o estudo que aqui apresento. Trata-se de uma investigação realizada no contexto da formação inicial de educadores de infância e professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, mais precisamente numa unidade curricular de Geometria da Licenciatura em Educação Básica, com foco no desenvolvimento do raciocínio geométrico. O estudo apresenta-se segundo a modalidade de um doutoramento por artigos, pelo que este documento — doravante designado por *Kappa* — se centra no enquadramento daqueles trabalhos e na discussão dos seus resultados.

A opção por um doutoramento nesta modalidade decorreu naturalmente do percurso da minha investigação, embora tenha sido uma decisão tardia. De facto, a apresentação de comunicações em seminários de investigação, quer no âmbito do programa de doutoramento, quer no âmbito de encontros de investigação nacionais e internacionais, paralelamente à produção de artigos, esteve sempre presente desde o momento em que recolhi dados. Esta dinâmica acabou por ser muito importante pelas oportunidades que criou de discussão do trabalho, o que me permitiu refletir, rever e reformular, mas também aprofundar ideias e fortalecer algumas opções que tomei. Desta forma, a produção e discussão dos textos e artigos foi marcando e moldando a investigação, o que considero ser coerente com a modalidade escolhida.

Além da coerência com o percurso, na minha perspetiva, esta modalidade tem outras vantagens. Por um lado, poderá promover uma maior disseminação do estudo do que uma tese, quer por via dos artigos publicados, quer pelo próprio *Kappa* ser mais condensado. Por outro lado, orienta o investigador para focos mais precisos, conduzindo-o a fazer uma seleção muito criteriosa dos dados e dos resultados mais relevantes da sua investigação, evitando a dispersão. Contudo, esta característica talvez seja, potencialmente, a maior força e o maior desafio de um estudo nesta modalidade. De facto, a extensão limitada que a maioria das revistas científicas impõe implica a seleção referida que, no âmbito do artigo, deve ser suficiente para sustentar as conclusões. Contudo, é preciso ter ainda em conta que cada artigo deve contribuir para o estudo mais global, pelo que todas as decisões devem ter em conta este quadro, sob pena de o estudo se tornar desarticulado. Assim, por um lado, o trabalho que aqui apresento traduz um esforço no sentido de dar contributos parcelares, apresentados em cada um dos artigos, focados em quatro assuntos: os processos de classificar, definir, justificar e raciocinar espacialmente. Por outro lado, estes contributos servem para dar resposta a um objetivo mais geral — compreender o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

O percurso de um doutorando é marcado por vários fatores. Grandes decisões que toma, como as que referi anteriormente, ou outras que ainda assim têm impacto, como a seleção dos participantes, os autores que lê, ou as pessoas com quem discute o seu trabalho. É feito de avanços e recuos, de dias de entusiasmo em que ingenuamente achamos que fizemos uma grande descoberta, e outros em que dizemos, parafraseando o meu amigo Pedro Almeida, “agora é que eu estava pronto para começar” … Por tudo isto, o apoio que sentimos para um trabalho que é prolongado, requer muito estudo, perseverança e uma boa dose de confiança é determinante para o seu sucesso.

Desta forma, neste último ponto faço vários agradecimentos. Alguns deles devem-se a pessoas sem as quais este trabalho ou não seria possível ou seria, pelo menos, muito diferente do que é. E porque este é efetivamente o estudo que quis fazer, o primeiro agradecimento é dirigido ao meu orientador, Professor João Pedro da Ponte que, depois do mestrado, renovou a sua disponibilidade para orientar a minha investigação e a quem

agradeço todas as sugestões, revisões e até provocações que me foi fazendo, respondendo sempre num ritmo que me continua a surpreender. O segundo agradecimento é devido às turmas que participaram no estudo, em particular a turma em que recolhi os dados apresentados nos quatro artigos, por aceitarem tão abertamente que a sua professora perscrutasse os seus pensamentos e discutisse as suas ideias e conhecimentos, as suas conquistas, mas também as dificuldades. Em terceiro lugar, aos meus colegas e amigas/os do Domínio da Matemática da Escola Superior de Educação de Lisboa: à Cristina Loureiro, coordenadora da unidade curricular, pela confiança que depositou no meu trabalho; à Ana Caseiro e ao Tiago Tempera que lecionaram a unidade de Geometria comigo, por terem sempre recebido as minhas propostas positivamente, mesmo quando estas impuseram um esforço adicional de trabalho, numa fase em que os próprios se encontravam a desenvolver os seus trabalhos de doutoramento; à Graciosa Veloso, que me acompanha desde o primeiro dia da minha carreira, e que foi a primeira a incentivar-me para que iniciasse o doutoramento; à Margarida Rodrigues e ao Pedro Almeida que, desde o primeiro dia da minha entrada na ESE, me fizeram sentir em casa. Em quarto lugar, quero agradecer às minhas colegas e amigas que foram doutorandas no Instituto de Educação de Lisboa neste período de tempo, em particular à Cristina Morais, Helena Gil, Joana Mata-Pereira e Marisa Quaresma, pelo companheirismo e partilha de ideias, em particular na fase final de estruturação do *Kappa*, em que a sua ajuda foi fundamental. Finalmente, agradeço ainda aos professores do Instituto de Educação, em particular à Professora Ana Henriques, à Professora Hélia Oliveira, à Professora Leonor Santos e ao Professor Henrique Guimarães, por todas as valiosas críticas construtivas que foram fazendo ao meu trabalho e pelos estímulos que me deram.

Um trabalho de doutoramento é, simultaneamente, um trabalho de grande isolamento, mas que afeta e é afetado por muitas pessoas, além do nosso espaço de trabalho. Assim, termino com um agradecimento aos meus amigos e à minha família, em particular ao meu marido, às minhas filhas e à minha mãe, pela sua compreensão pelas horas que lhes faltei e pela confiança que sempre me transmitiram. E porque nem sempre os que mais nos influenciam estão ainda fisicamente connosco, lembro aqui o meu querido pai de quem aprendi, pela força do exemplo, o brio profissional e a importância de investirmos na nossa formação ao longo da vida.

Lina Brunheira

Lisboa, 20 de setembro 2018

Índice geral

Índice de figuras

Índice de tabelas

Lista de abreviaturas

AGD	Ambiente de geometria dinâmica
ESELX	Escola Superior de Educação de Lisboa
IBD	Investigação baseada em design
LEB	Licenciatura em Educação Básica
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics

1 Introdução

Neste capítulo, apresento o enquadramento e a motivação para esta investigação, bem como o objetivo e as questões que a orientaram. Descrevo ainda a estrutura do *Kappa* e apresento informações relevantes sobre os quatro artigos que compõem o estudo.

Enquadramento e motivação para o estudo

Quando aos 16 anos decidi ser professora de matemática, o meu professor de 11.º ano aconselhou-me a escolher Geometria Descritiva como opção para o ano seguinte. Na sua opinião, essa opção seria importante para o desenvolvimento da minha capacidade de visualização, uma perspetiva que analisada a esta distância não deixa de ser curiosa, atendendo ao estado do ensino da Matemática nos anos 80. Apesar de nunca ter tido aquela disciplina, o meu professor não antecipava que eu tivesse quaisquer dificuldades em acompanhar os meus futuros colegas e assim, seguindo o seu conselho, mudei de área de estudos e de escola, integrando uma turma que já tinha frequentado Geometria Descritiva nos dois anos anteriores. Olhando para trás, esta foi a primeira experiência que me fez refletir sobre a importância da visualização e que, de certa forma, constituiu um enigma fascinante para mim: Por que razão eu própria, sem aprendizagens anteriores na disciplina, "via" num desenho aquilo que alguns dos meus colegas não conseguiam "ver" nem imaginar? Como é que o meu professor do 11.º ano não antecipava possíveis dificuldades? E porque era tão importante desenvolver essa capacidade para ser professora de matemática?

Nos anos que se seguiram, frequentei a Licenciatura em Ensino da Matemática onde considero que a preocupação com a visualização espacial esteve praticamente ausente, reforçando a tendência na forma como eu, durante muito tempo, abordei a resolução de problemas — recorrendo insistentemente a processos algébricos — algo que observei igualmente numa investigação que realizei com professores estagiários de Matemática (Brunheira, 2000). Na verdade, se atendermos a que durante muito tempo o ensino da geometria se reduziu a pouco mais do que o trabalho com o Teorema de Pitágoras ou à relação da geometria com a medida (Veloso, 1998), não é de estranhar que a maioria dos adultos, incluindo os professores, não tenha desenvolvido devidamente esta capacidade, ou não a utilize como recurso na resolução de problemas.

Tradicionalmente, a geometria euclidiana foi especialmente valorizada pela sua natureza axiomática e por ser o terreno do raciocínio hipotético-dedutivo por excelência.

Contudo, desde o final da década de 80, muito mudou na forma como os educadores matemáticos perspetivam o ensino da geometria, em grande medida por influência do "movimento dos *Standards*" (Craine, 2009), e com consequências a nível curricular. Na primeira edição daquele documento, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991) apresenta a geometria como um tema a valorizar em todos os níveis de escolaridade, associando-lhe algumas ideias fortes como a visualização e a representação de figuras geométricas, a resolução de problemas através de modelos geométricos e o desenvolvimento do sentido espacial — o qual inclui ideias e intuições acerca das figuras bi e tridimensionais, suas características e inter-relações e os efeitos de modificações dessas formas.

Progressivamente, o conceito de visualização, inicialmente muito associado à criação de imagens mentais (Zimmermann & Cunningham,1991), passou ser visto como uma forma de raciocínio baseado no uso de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, que visam a resolução de problemas ou demonstração de propriedades (Gutiérrez, 1996) ou representar e comunicar informação, pensar e desenvolver ideias anteriormente desconhecidas e avançar na sua compreensão (Arcavi, 2003). Surgem assim novas expressões que remetem para esta conceptualização, como "raciocínio visual" (Goldenberg, Cuoco, & Mark, 1998; Hershkowitz, 1998) ou "raciocínio espacial" (Clements & Battista, 1992), valorizadas pelos investigadores como constituindo não apenas um suporte intuitivo numa fase preliminar do raciocínio, mas também ferramentas cognitivas críticas para uma análise geométrica formal. É assim que a edição seguinte dos *Standards*, publicada em 2000, renova a importância dos aspetos acima referidos, introduzindo algumas ideias novas, e consagra um tipo específico de raciocínio — o raciocínio espacial, cujo desenvolvimento está presente em todas as normas, do pré-escolar ao 12.º ano — e ainda valoriza o uso da tecnologia como uma ferramenta particularmente favorável à exploração e formulação de conjeturas (NCTM, 2007).

Em Portugal, ao nível curricular, os programas do ensino básico do início dos anos 90 procuram já valorizar o ensino da geometria, quer atribuindo-lhe um lugar de destaque relativamente a outros temas, quer sublinhando o interesse da resolução de problemas geométricos e o seu potencial no desenvolvimento do raciocínio e comunicação (ME-DGEBS, 1991). Contudo, é com a introdução do Currículo Nacional para o Ensino Básico (Abrantes, 2001) que as propostas dos *Standards* adquirem maior visibilidade, reconhecendo-se a aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas, em geometria e noutras áreas, como uma competência a desenvolver em todos os ciclos. Posteriormente, o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) vem dar maior corpo às orientações apresentadas pelo documento anterior, estabelecendo o desenvolvimento da visualização e do sentido espacial como propósito principal e objetivo geral do ensino da geometria ao longo de todos os níveis de ensino, sugerindo várias oportunidades para o desenvolvimento destas capacidades, sobretudo associadas à resolução de problemas. No sentido contrário, o Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico (MEC, 2007) não fazem qualquer referência à visualização ou raciocínio espacial e apresentam a geometria como "um terreno propício ao desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo dos alunos" (p. 19). As atuais Aprendizagens Essenciais (ME-DGE, 2018) procuram inverter este retrocesso, evidenciando o desenvolvimento da visualização como uma componente do raciocínio matemático fundamental à construção de explicações e justificações.

Numa dimensão mais pessoal, a valorização da geometria e dos aspetos associados ao raciocínio e visualização está muito ligada a experiências pessoais e profissionais. Entre elas, destaco a minha participação no projeto *Matemática Para Todos — Investigações na sala de aula*, um projeto que implicou vários professores e investigadores num estudo centrado nas tarefas de investigação matemática. O subgrupo do projeto dedicado à geometria, onde também me integrei, desenvolveu uma experiência e um conhecimento que considero muito relevantes e consistentes com as ideias atuais sobre o ensino desta área. Entre elas, destaco alguns aspetos fundamentais assinalados por Abrantes (1999), cuja valorização constitui um pressuposto importante neste estudo:

- A geometria é uma fonte de problemas de vários tipos: de visualização e representação; de construção e lugares geométricos; envolvendo transformações geométricas; em torno das ideias de forma e de dimensão; implicando conexões com outros domínios da Matemática, como os números, a álgebra, o cálculo combinatório, a análise; apelando a processos de "organização local" da Matemática, nomeadamente de classificação e hierarquização a partir de determinadas definições e propriedades.

- As actividades investigativas em geometria conduzem rapidamente à necessidade de se lidar com diversos aspectos essenciais da natureza da própria Matemática. Formular e resolver problemas, fazer conjecturas, testá-las, validá-las ou refutá-las, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações, tornam-se processos naturais. Ao mesmo tempo, surgem oportunidades para se discutir o papel das definições e para se examinar as consequências de se adoptar uma ou outra definição, assim como para se compreender a natureza e o valor da demonstração em Matemática. (p. 156)

O interesse da geometria concebida desta forma está muito associado ao envolvimento regular dos alunos em atividades de natureza investigativa, uma prática que é própria do ensino exploratório (Ponte, 2005). Este tipo de abordagem, onde cabe a quem aprende uma parte importante do trabalho de descoberta e construção do conhecimento, assenta essencialmente em tarefas de cunho exploratório e investigativo e numa dinâmica de aula onde, além do espaço reservado ao trabalho dos alunos sobre as tarefas, se destacam ainda momentos de discussão e negociação de significados. Como refere Canavarro (2011), trata-se de um tipo de ensino particularmente exigente e que levanta múltiplos desafios aos professores, desde a fase de planificação das aulas até à sua concretização.

Porém, os estudos existentes em Portugal e noutros países sobre o conhecimento geométrico de professores e futuros professores revelam muitas fragilidades (Clements & Sarama, 2011; Fujita & Jones, 2006; Jones, Mooney, & Harries, 2002; Menezes, Serrazina & Fonseca, 2014; Tempera, 2010; Viseu, Menezes, & Almeida, 2013). Em particular, o estudo conduzido por Tempera (2010) no âmbito da unidade curricular de Geometria[1] na Escola Superior de Educação de Lisboa (ESELX) revela que os futuros professores evidenciam deficiências no seu conhecimento. Por exemplo, no que respeita ao processo de classificação inerente ao raciocínio geométrico, este autor observa que

> As classificações apresentadas se baseiam essencialmente em protótipos de figuras adquiridos durante a escolaridade anterior. A posição, o aspecto e a dimensão da figura parecem sobrepor-se ao conhecimento das propriedades de uma classe de figuras (Clements & Battista, 1992). Este facto poderá advir de um limitado número de modelos visuais e das definições conceptuais das próprias figuras. (Tempera, 2010, p. 89)

Além destas dificuldades, Tempera (2010) identificou outras fragilidades no conhecimento dos futuros professores que, aparentemente, não tiveram uma melhoria significativa com a frequência das disciplinas do curso:

> Afigura-se uma percepção das falhas e limitações da formação inicial, na medida em que os estudantes têm sucesso nas unidades curriculares do domínio científico da matemática, mas não existem diferenças significativas entre os conhecimentos destes estudantes e dos que ainda não frequentaram essas unidades. (Tempera, 2010, p. 93)

[1] Esta unidade integra o 1.º ciclo de estudos para futuros educadores de infância e professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico (doravante designados simplesmente por "futuros professores") e é lecionada no 4.º semestre do curso.

As insuficiências no conhecimento descritas na investigação internacional e também as retratadas por Tempera (2010), foram igualmente reconhecidas por mim enquanto docente da Licenciatura em Educação Básica (LEB) na mesma instituição e encaradas como um problema que se colocou à minha prática profissional e desencadeou este estudo. Desta forma, a investigação conduzida tem um propósito interventivo, visando modificar as práticas da formação inicial de professores dos primeiros anos, por forma a melhorar as suas aprendizagens e contribuir para o conhecimento sobre a sua formação. Esta reformulação deve resultar de uma interação entre a compreensão (progressivamente mais profunda) sobre a forma como os futuros professores desenvolvem o seu conhecimento e capacidades e tentativas sucessivas de melhoria de estratégias e ferramentas de ensino.

Objetivo e questões do estudo

Entre os vários aspetos ligados à aprendizagem da geometria, a minha experiência, interesses e as orientações provenientes do campo da Didática da Matemática levaram-me a focar esta investigação no raciocínio, com especial atenção para o papel do raciocínio espacial. Desta forma, o objetivo deste estudo é compreender de que forma os futuros professores desenvolvem o raciocínio geométrico, a partir de uma experiência de formação que valoriza os processos de classificar, definir, generalizar e justificar através de uma abordagem exploratória, no âmbito de uma unidade curricular de uma LEB. Mais especificamente, procuro responder às seguintes questões:

1. Quais os conhecimentos que as formandas revelam sobre os processos de classificar e definir figuras geométricas, bem como justificar generalizações sobre figuras geométricas, e quais os aspetos que influenciam a sua aprendizagem?

2. De que forma o raciocínio espacial intervém nos processos de classificar, definir e justificar generalizações sobre figuras geométricas, e qual o contributo de atividades em torno destes processos para o seu desenvolvimento?

3. Quais os aspetos da experiência de formação que se revelaram mais significativos relativamente ao contributo para o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos futuros professores?

A estrutura do *Kappa* e os quatro artigos

Esta investigação enquadra-se no âmbito de um doutoramento por artigos publicados ou aceites para publicação em revistas indexadas, pelo que a estrutura do

Kappa proporciona o enquadramento e explicitação dos contributos daqueles trabalhos no âmbito mais geral desta investigação. Desta forma, neste capítulo introdutório, apresento a problemática, o objetivo e questões para as quais os resultados dos artigos contribuem individual ou conjuntamente. No capítulo 2, apresento uma revisão da literatura sobre o raciocínio geométrico, de maneira geral e perspetivando o contexto da formação inicial de professores dos primeiros anos, e discuto os conceitos centrais que enquadram o estudo. No capítulo 3, identifico e justifico as opções metodológicas, com realce para a investigação baseada em design, o duplo papel de professora e investigadora e a descrição da experiência de formação. No capítulo 4, dou destaque aos quatro artigos em que assenta a investigação com uma descrição dos seus objetivos e questões, quadro conceptual e principais resultados. No capítulo 5, respondo às três questões do estudo a partir dos resultados de cada artigo e da sua integração. No capítulo 6, apresento a conclusão da investigação voltando à conjetura que orientou a construção da experiência de formação e termino com uma breve reflexão.

A Tabela 1 organiza a informação sobre os artigos relativamente à revista de publicação, respetiva indexação, referência interna e referência bibliográfica.

Tabela 1

Informação relativa aos quatro artigos

Referência interna	Referência bibliográfica	Indexação
Artigo 1 (Anexo A)	Brunheira, L. & Ponte, J. P. (…). From the classification of quadrilaterals to the classification of prisms: An experiment with prospective teachers. *Journal of Mathematical Behavior* Artigo publicado online com a referência https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.06.004	Scopus
Artigo 2 (Anexo B)	Brunheira, L. & Ponte, J. P. (2018). Definir figuras geométricas: uma experiência de formação com futuras professoras e educadoras. *Quadrante vol. XXVII (2),* 133-159.	Qualis B1
Artigo 3 (Anexo C)	Brunheira, L. & Ponte, J. P. (2019). Justificando generalizações geométricas na formação inicial de professores dos primeiros anos. *Bolema vol 33(63),* 88-108.	Qualis A1
Artigo 4 (Anexo D)	Brunheira, L. & Ponte, J. P. (2018). Desenvolvendo o raciocínio espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos. *Zetetiké vol 26(3)*,464-485. doi:10.20396/zet.v26i3.8652882	Qualis B1

2 O raciocínio geométrico na formação inicial

Neste capítulo apresento um enquadramento conceptual do raciocínio geométrico, tendo em perspetiva o seu desenvolvimento na formação inicial. Desta forma, inicio com o conceito mais abrangente de raciocínio matemático, considerando as tendências curriculares das últimas décadas e a forma como tem sido perspetivado em educação matemática. Abordando mais particularmente o raciocínio geométrico, analiso a sua especificidade tendo em conta o objeto de estudo, a conceptualização de raciocínio espacial, as principais teorias sobre o desenvolvimento do raciocínio geométrico e termino com a análise de três processos que foco neste estudo: definir, classificar e justificar. Finalmente, tendo em conta o contexto do estudo, discuto perspetivas sobre o conhecimento matemático necessário para a docência e sobre a forma como deve ser desenvolvido na formação inicial, terminando com um olhar sobre esta formação na área da geometria.

Raciocínio matemático

Tendências curriculares. Como afirmam Yackel e Hanna (2003), é crescente o interesse no raciocínio matemático, o que pode ser observado na edição de 2000 dos *Princípios e normas da matemática escolar*, onde o NCTM apresenta o raciocínio como uma característica definidora da matemática e elege o raciocínio e a demonstração como uma das normas de processo, as quais dão ênfase às maneiras de adquirir e utilizar os conteúdos matemáticos (NCTM, 2007). Como referem as autoras, a área da geometria e outros tópicos trabalhados a nível superior têm sido tradicionalmente tratados privilegiando o raciocínio e a demonstração. Contudo, naquele documento orientador, o NCTM vai muito além desta visão ao considerar que o raciocínio e a demonstração devem ser partes integrantes da experiência matemática a partir da educação pré-escolar. De acordo com a sua visão,

> o raciocínio e a demonstração constituem formas poderosas de desenvolver e expressar intuições sobre uma vasta gama de fenómenos. As pessoas que raciocinam e pensam analiticamente tendem a detetar padrões, estruturas e regularidades, quer em situações da vida real, quer em objetos simbólicos. (NCTM, 2007, p. 61)

Na verdade, Yackel e Hanna (2003) afirmam que esta ênfase no raciocínio, em particular em crianças mais novas, resulta da evolução das teorias sobre aprendizagem e da "escolha deliberada que os educadores matemáticos fizeram como resultado da melhor compreensão sobre a forma como os indivíduos adquirem conhecimento” (p. 227). Ao contrário da perspetiva behaviorista que dominou o pensamento sobre educação durante décadas, da visão construtivista decorre que o raciocínio é o processo através do qual os indivíduos aprendem e que é impossível separar os conteúdos de aprendizagem do raciocínio. Esta ideia é consentânea com a perspetiva de Russel (1999) que afirma que, sendo a matemática uma ciência que lida com entidades abstratas, o raciocínio é a ferramenta que permite ao indivíduo compreender a abstração, é o que ele mobiliza para pensar sobre as propriedades de objetos e desenvolver generalizações aplicáveis a classes de objetos. Também Stylianides (2007) atribui o crescente interesse pelo raciocínio, em particular pela demonstração, ao facto de ser um processo fundamental para saber e fazer matemática, ser a base da compreensão matemática e ser essencial para desenvolver e comunicar o conhecimento matemático.

Em Portugal, também o raciocínio matemático mereceu um especial destaque no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), apresentando-se como uma capacidade transversal que deve “merecer uma atenção permanente no ensino” (p. 1). Naquele documento, a conceção sobre raciocínio matemático envolve vários processos que devem ser integrados progressivamente no ensino:

> … a formulação e teste de conjecturas e, numa fase mais avançada, a sua demonstração. Os alunos devem compreender o que é uma generalização, um caso particular e um contra-exemplo. Além disso, o raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas. (p. 8)

Neste programa, o raciocínio surge associado à compreensão da matemática, à comunicação, à aquisição de conceitos, representações e procedimentos matemáticos. Através do raciocínio, são valorizados aspetos relativos à abstração e formalização, a argumentação lógica e o raciocínio demonstrativo, mas também outros “recursos e capacidades cognitivas diversas como o raciocínio plausível, a imaginação e a intuição necessários à produção de conhecimento matemático” (Ponte et al., 2007, p. 2).

Contudo, se os processos de justificação e demonstração estão, poder-se-á dizer, universalmente associados ao raciocínio matemático, os outros aspetos mais ligados à criação matemática que vemos valorizados neste programa são frequentemente ignorados. É o caso do Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013) em que, apesar da referência ao estabelecimento de conjeturas, são pouco consideradas as que não podem ser demonstradas e todo o trabalho realizado desde o 1.º ciclo visa a posterior proficiência no raciocínio hipotético-dedutivo.

De facto, a ideia de que a matemática desenvolve o raciocínio e que esse é um aspeto a valorizar no seu ensino será, provavelmente, consensual entre matemáticos, educadores matemáticos e professores, constituindo até um lugar-comum. Porém, como refere Steen (1999), a forma como se concebe o raciocínio pode ser muito diferente. Na perspetiva do autor, confirmada pelos documentos curriculares referidos, umas vezes a expressão "raciocínio matemático" é utilizada como uma referência à metodologia distintiva da matemática que compreende "raciocínio axiomático, dedução lógica e inferência formal" (p. 270). Outras vezes remete para uma habilidade quantitativa e geométrica mais abrangente que funde análise e intuição com raciocínio e inferência, com diferentes níveis de rigor. Estas duas formas de perspetivar o raciocínio — a que privilegia a vertente dedutiva e a que dá atenção a outras formas de raciocínio — está também associada a uma valorização da matemática essencialmente como produto, no primeiro caso, ou (também) como processo, no segundo caso (Oliveira, 2008). Estas duas perspetivas surgem nos programas de matemática do ensino básico de 2007 e 2013 em vários momentos, de que são exemplo as seguintes indicações: "Promove-se desta forma uma aprendizagem progressiva, na qual se caminha etapa a etapa, respeitando a estrutura própria de uma disciplina cumulativa como a Matemática" (ME, 2013, p. 1); "Os alunos devem ser capazes de fazer Matemática" (Ponte et al., 2007, p. 6).

Conceções sobre raciocínio matemático. Uma ideia muito presente na literatura é de que o raciocínio corresponde a um conjunto de processos que permitem extrair informação de outras informações (Duval, 1998; Leighton, 2004; Oliveira, 2008), entre os quais se incluem "a formulação de questões e estratégias de resolução, formulação e teste de generalizações e outras conjeturas e a sua justificação" (Mata-Pereira & Ponte, 2017, p. 170).

No que respeita aos tipos de raciocínios, falamos habitualmente de raciocínio indutivo, abdutivo e dedutivo (Duval, 1998), sendo que o último, considerado por muitos o tipo de raciocínio matemático por excelência, teve durante séculos um foco especial no ensino da geometria. Oliveira (2008) refere que é de facto o raciocínio dedutivo que tem um papel quase exclusivo na fase concludente do processo de investigação, pois o conhecimento novo fica estabelecido a partir de uma cadeia de deduções do tipo A => B => … => Z que produz conclusões válidas, desde que não haja erros nesta cadeia.

Contudo, lembra matemáticos importantes como Félix Klein, Paul Halmos, Henry Poincaré ou George Pólya que salientam a fase exploratória da investigação matemática, muito marcada por tentativas, avanços e recuos, e *insights*, muitas vezes decorrentes do estudo experimental, de analogias, de intuições. Ao contrário da fase final, na fase exploratória o raciocínio matemático "é eminentemente conjetural pelo que, as conclusões que produz, em geral têm uma validade plausível e não necessária" (Oliveira, 2008, p. 5) e os tipos de raciocínio emergentes são indutivo, abdutivo e transformativo (ou imagético).

Lannin, Ellis e Elliot (2011), afirmam que o raciocínio matemático é um processo evolutivo que inclui conjeturar e generalizar, investigar *porquê* e justificar ou refutar, três subprocessos que interagem entre si (Figura 1):

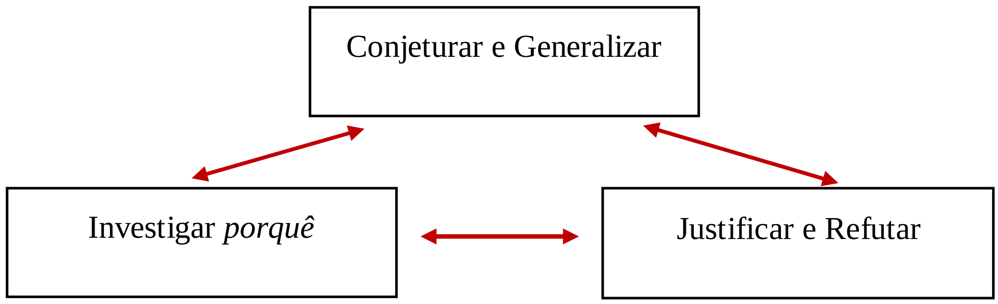


Figura 1. Modelo do raciocínio matemático de Lannin et al. (2011, p. 11)

Procurando avançar na compreensão sobre estes processos, Lannin et al. (2011) explicam que conjeturar implica raciocinar sobre relações matemáticas de forma a produzir afirmações cuja validade ainda não foi estabelecida. Quanto a generalizar, distinguem dois tipos de atividades: identificar pontos comuns em casos diferentes e estender o raciocínio além do domínio em que foi originado, ou seja, "pensar numa relação, ideia, representação, regra, padrão ou outra propriedade matemática e observá-la num domínio mais vasto" (p. 20). Na verdade, toda a generalização envolve um certo domínio que, como referem os autores, por vezes está apenas implícito. Mas se é importante ser capaz de estender um raciocínio a outros domínios, é também importante reconhecer em que domínio uma generalização é aplicável.

Para Lannin et al. (2011), justificar significa construir uma sequência lógica de afirmações, cada uma suportando-se em conhecimento já estabelecido, de forma a chegar a uma conclusão. Este tipo de justificação deve conter linguagem geral que demonstre que se aplica a mais do que um caso particular, sem prejuízo de se poderem usar exemplos, mas que se devem constituir como exemplos genéricos. Assim, os autores apresentam duas características importantes numa justificação válida: a) a linguagem que deve estabelecer uma relação geral e especificar o domínio em que é válida e b) o raciocínio que deve suportar a relação geral e mostrar que se aplica em todos os exemplos desse domínio. Os autores dedicam uma atenção especial ao processo de refutar, que constitui também uma forma de justificação — a de que uma afirmação é falsa. Como afirmam, uma das estratégias possíveis para refutar uma afirmação consiste em apresentar um contraexemplo, mas nem sempre este recurso é entendido porque, fora da matemática, as pessoas tendem a considerar que uma afirmação é "em geral verdadeira", mesmo que haja algumas exceções raras. Além de compreender o papel crucial dos contraexemplos, é necessário saber avaliar a validade dos argumentos produzidos, o que "envolve determinar em que medida incluem pressupostos corretos ou incorretos, conclusões válidas mas com erros lógicos, ou argumentos válidos que ainda assim explicam apenas uma parte da afirmação" (p. 45). Procurar um argumento que suporte uma conjetura ou analisar criticamente um argumento cria oportunidades para revisitar a validade da conjetura e, eventualmente, refiná-la.

Finalmente, Lannin et al. (2011) consideram que investigar *porquê* é um pivô essencial entre os processos conjeturar e generalizar e os processos justificar e refutar. Ao investigar por que razão uma conjetura é verdadeira ou falsa, os alunos precisam atender a aspetos particulares que fornecem *insight* sobre as relações que explicam a conjetura. Mais ainda, o confronto de diferentes olhares que explicam ou ajudam a compreender a validade de uma conjetura implica a) revisitar o significado de conceitos e procedimentos; b) considerar o que é semelhante nos vários exemplos; e c) analisar várias representações que ajudam a compreender uma relação mais geral. O papel que os autores atribuem a investigar *porquê* está intrinsecamente associado ao processo de justificar, na medida que "os alunos constroem justificações para se convencerem a si próprios e aos outros porque é que uma afirmação particular é verdadeira" (Lannin, 2011, p. 35). Esta visão enfatiza a compreensão do conhecimento estabelecido e não tanto a sua verificação, ou seja, acompanha a forma como os matemáticos veem uma boa demonstração — aquela que permite compreender o significado do que fica demonstrado, por outras palavras, "ver não apenas que é verdade mas também porque é verdade" (Yackel & Hanna, 2003, p. 228).

Raciocínio geométrico

Tal como existem diferentes perspetivas sobre o significado do raciocínio matemático, também no que respeita ao raciocínio geométrico encontramos ideias divergentes o que, neste caso, é agravado pela proliferação de várias expressões com significado aparentemente semelhante ("pensamento geométrico", "raciocínio visual", "visualização espacial"…). Por exemplo, Battista (2007) define raciocínio geométrico como consistindo "na invenção e uso formal de sistemas conceptuais para investigar o espaço e a forma" (p. 843), definição que podemos considerar relativamente abrangente e até um pouco difusa. Já para Johnston-Wilder e Mason (2005), o raciocínio tem uma função bem precisa: "o propósito do raciocínio é justificar conjeturas" (p. 111), sendo que a especificidade do raciocínio geométrico resulta do foco em que incide: "sempre que estamos a tentar explicar ou encontrar razões para algo em geometria, precisamos focar-nos nas propriedades (invariantes) que são resultado das condições do problema ou que surgem a partir de qualquer construção que introduzimos no problema" (p. 40). De seguida, apresento outras formas de perspetivar a especificidade do raciocínio geométrico.

Objeto de estudo. Como em todas as áreas da matemática, o raciocínio opera sobre algum tipo de objetos e essa perspetiva poderá trazer alguma luz à questão em apreço. Por exemplo, para Duval (1998), todos os processos que permitem extrair informação de outras informações são considerados próprios do raciocínio. Porém, do ponto de vista cognitivo, os tipos de processos associados ao raciocínio dependem da forma como a informação é apresentada e está organizada. No caso específico da geometria, essa informação é dada frequentemente segundo uma organização visual a partir da qual podemos nomear objetos, levantar questões e conjeturas sobre esses objetos e suas relações.

Também para Battista (2008), em geometria "raciocinamos *sobre* objetos; raciocinamos *com* representações" (p. 342), pelo que é fundamental ter em conta a natureza de ambos para analisar o raciocínio em geometria. Na tentativa de caracterizar os objetos geométricos, Battista (2008) propõe a distinção entre quatro tipos: *os objetos físicos*, que incluem entidades concretas como uma bola ou uma porta, mas também desenhos em papel ou construções[2] em ambientes dinâmicos; *objetos percetuais*, que são entidades mentais correspondentes à forma como os objetos físicos são vistos; *objetos conceptuais* (ou conceitos), correspondentes a representações mentais que são ativadas quando um objeto é percecionado ou quando é evocado; e os *conceitos geométricos* (no sentido das definições dos conceitos) que são entidades formais, explicitadas de forma verbal. Tanto os *objetos percetuais* como os *objetos conceptuais* correspondem a objetos mentais, mas podem divergir uma vez que o conhecimento que temos dos conceitos ou dos contextos acabam por influenciar a perceção. Por exemplo, a Figura 2 é percecionada por muitas pessoas como um livro aberto e não como dois paralelogramos unidos por um lado (Veloso, 1998), uma vez que o seu conhecimento do contexto ativa um modelo mental que influencia de forma determinante o objeto percecionado.

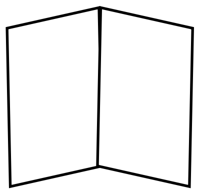


Figura 2. Livro aberto ou dois paralelogramos com um lado comum? Reproduzido a partir de Veloso (1998, p. 119)

Do mesmo modo, os *objetos conceptuais* e os *conceitos geométricos* podem não coincidir, o que podemos observar quando uma criança restringe o conceito de triângulo à imagem mental de um triângulo equilátero (Battista, 2009).

Além de distinguir entre os vários tipos de objetos sobre os quais incide o raciocínio, Battista (2009) afirma ainda que os objetos físicos desempenham duas funções diferentes. Por um lado, os objetos constituem o *input* para a formação de conceitos geométricos, ou seja, é da análise dos objetos que surgem vários conceitos. Os objetos passam a ser assim representados ou descritos pelos conceitos. Por outro lado, os objetos físicos são frequentemente utilizados para ilustrar conceitos geométricos formais. De modo semelhante, os desenhos e os diagramas[3] são utilizados sobretudo com dois grandes

[2] O termo "construção" é aqui usado com o significado de "*draggable computer figure*", ou seja, uma figura geométrica construída num AGD que mantém as suas propriedades quando os seus elementos são "arrastados".

[3] Tradução direta do inglês *diagram*. Na literatura sobre geometria e visualização, existem vários termos que são utilizados para distinguir entre o objeto geométrico e a sua representação: diagrama, desenho, imagem, retrato… Alguns investigadores tendem a usar preferencialmente um termo, mas outros usam mais do que um sem aparente distinção (por exemplo, diagrama e desenho em Battista, 2007). Independentemente de pequenas diferenças entre os conceitos, o que todas as designações pretendem

objetivos: (a) representar uma classe de figuras (por exemplo, o conjunto dos retângulos), e (b) para representar relações geométricas (por exemplo, que as bissetrizes dos ângulos de um triângulo se intersetam no incentro do triângulo) (Battista, 2007). Isto significa que um triângulo pode estar a representar um único objeto sobre o qual interessa conhecer as características particulares, ou a classe de todos os triângulos, o que muitas vezes depende da maneira como cada indivíduo interpreta a situação. Para este autor, o ensino tem negligenciado a maneira como os alunos formam os seus conceitos e não tem atendido aos diferentes papéis dos objetos físicos e dos diagramas, com consequências negativas para aprendizagem.

A dicotomia entre objeto e representação em geometria tem sido analisada por outros investigadores. Por exemplo, Laborde (1992) distingue desenho (a representação material) de figura (o conceito teórico). No mesmo sentido, Mariotti (1992) atribui duas dimensões às figuras geométricas, uma dimensão conceptual e outra espacial, as quais fundamentam a especificidade do raciocínio geométrico:

> O que há de específico no raciocínio geométrico? A geometria, enquanto campo matemático, lida com um tipo particular de "objetos": as figuras geométricas. Do ponto de vista matemático, as figuras geométricas são entidades puramente abstratas, completamente controladas pelas suas definições num quadro de uma axiomática, mas o que elas têm de específico é que preservam uma característica manejável pictoricamente chamada espacialidade. As figuras geométricas podem ser consideradas entidades mentais duplas, nas quais participam dois aspetos: o figurativo e o conceptual. (pp. 9-10)

Para Fischbein (1993), a dicotomia entre o conceito e a sua representação deve ser analisada tendo em conta um terceiro elemento em interação, os *conceitos figurativos*, que resultam da articulação entre as dimensões anteriores enunciadas por Mariotti:

> Os objetos da investigação e manipulação geométrica são entidades mentais, por nós chamadas de *conceitos figurativos*, os quais refletem propriedades espaciais (forma, posição, dimensão) e, ao mesmo tempo, possuem qualidades conceptuais — como idealidade, abstração, generalidade e perfeição. (p. 143)

No entender de Fischbein, este conceito não significa que a representação que temos em mente quando pensamos numa figura geométrica não tenha ela própria qualidades sensoriais, como por exemplo a cor. Contudo, quando operamos com a figura geométrica, essas qualidades devem ser ignoradas e apenas as suas propriedades espaciais

salientar é que se trata de uma representação visual. Nesta revisão da literatura, respeitarei as designações originalmente utilizadas por cada autor, apresentando o seu significado quando ele for explicitado.

devem ser tidas em conta. Podemos assim pensar numa versão "purificada" da imagem, aquela com a qual operamos logicamente.

Raciocínio espacial. A evolução da matemática no séc. XIX trouxe a busca pelo rigor que teve como consequência a recusa das demonstrações apoiadas em figuras e a desconfiança sobre o papel da perceção visual no raciocínio (Veloso, 1998). Além da influência da matemática, também a ausência de investigação na área da visualização, particularmente depois de a psicologia ter sido dominada pela corrente behaviorista, teve uma influência negativa na sua valorização (Presmeg, 2006). Contudo, desde a década de 90, vários investigadores se têm debruçado sobre o papel da visualização na aprendizagem da matemática, incluindo em geometria. Esta mudança de paradigma deriva de várias influências, provenientes da educação matemática, da psicologia e até da própria matemática. Um dos nomes mais ligados a esta evolução é Freudenthal que, em 1973, critica aqueles que insistiam numa visão dedutiva da geometria e defende objetivos ligados à compreensão do espaço, à matematização da realidade, à realização de descobertas e de experiências de organização local (Veloso, 1998). Também para o matemático americano Malkevitch (2009), os problemas atuais em que os geómetras se envolvem são muito diferentes dos que dominaram a geometria durante três milénios. As questões ligadas aos sistemas axiomáticos permanecem e claro que há problemas antigos em aberto, mas os problemas atuais não poderiam ser colocados antes e esta mudança leva-o a sugerir uma definição alternativa de geometria: "o ramo da Matemática que estuda os fenómenos visuais" (p. 14). Na mesma linha, o matemático britânico Atiyah (1982) compara a geometria com a álgebra assinalando uma dicotomia:

> De um modo geral, quero sugerir que a geometria é a parte da matemática na qual domina o raciocínio visual, ao passo que a álgebra é aquela em que domina o raciocínio sequencial. Esta dicotomia é talvez melhor transmitida pelas palavras *'insight' versus 'rigour'* e ambas desempenham um papel essencial nos problemas reais da matemática. (p. 183)

Do ponto de vista da educação matemática, vários autores valorizam a visualização e o raciocínio espacial enquanto ferramenta cognitiva poderosa, quer em situações mais informais, quer como ajuda intuitiva para encontrar uma demonstração (Duval, 1998), quer ainda para uma análise geométrica formal (Battista, 2007; Hershkowitz,1998; Johnston-Wilder & Mason, 2005). Mais recentemente, Sinclair et al. (2016) afirmam que na última década o raciocínio espacial tem merecido uma atenção crescente na investigação, quer na educação matemática, quer nas ciências cognitivas e, se é verdade que este tipo de raciocínio é relevante em todas as áreas da matemática, sem dúvida que ele merece um destaque particular no ensino e aprendizagem da geometria.

Antes de prosseguir, procuremos um significado mais preciso para esta ideia de raciocínio que tem por base um suporte visual e que, nesta secção, já apelidei de diferentes formas — visualização espacial, raciocínio espacial, raciocínio visual — de forma a ser fiel às denominações utilizadas pelos autores citados. De facto, a revisão de estudos feita por Sinclair et al. (2016) a partir de 2008, refere a existência de vários termos ou expressões (como as que referi anteriormente) que pretendem significar algo parecido e que têm em comum a atividade de imaginar objetos estáticos ou dinâmicos e atuar sobre eles (por exemplo, rodar, aumentar, etc.). Já anteriormente, numa revisão de estudos bastante alargada, Gutiérrez (1996) referia que a literatura existente sobre visualização até aquela data inclui uma grande variedade de termos e expressões (entre os quais "raciocínio visual", "pensamento espacial", "imagens mentais", "espaciais", "visuais", etc.) gerando uma "confusão" que reflete a coexistência de diferentes áreas de investigação que se dedicam ao estudo da visualização, entre elas a educação matemática e a psicologia, e neste último caso com diferenças entre as abordagens dos psicólogos de educação e os cognitivistas. Como explicam Zimmermann e Cunningham (1991), se na área da psicologia a visualização está muito associada à construção de imagens mentais, em educação matemática a limitação de que as imagens sejam manipuladas mentalmente, sem ajuda de papel e lápis ou de um computador, parece artificial, uma vez que nós estamos interessados que os alunos desenvolvam, por exemplo, a capacidade de desenhar um diagrama que permita avançar na compreensão, seja de um conceito ou de um problema. Aliás, para estes dois autores, o início dos anos 90 corresponde ao que apelidaram do "renascimento da visualização", em boa medida desencadeada pelos desenvolvimentos tecnológicos que, tirando partido das capacidades gráficas dos computadores, expandiram o alcance e o poder da visualização em todas as áreas, incluindo outras ciências.

Tomemos por referência a definição de Battista (2007) para raciocínio espacial, considerado como uma das componentes do raciocínio geométrico, que se traduz pela

> capacidade de 'ver', analisar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações. O raciocínio espacial inclui gerar imagens, analisá-las para responder a questões sobre elas, transformar e operar sobre imagens, e manter as imagens ao serviço de outras operações mentais. (p. 843)

Arcavi (2003) usa antes o termo “visualização”, estende a sua conceção além da capacidade e explicita a possibilidade de operar com materiais físicos além das imagens mentais, mas podemos reconhecer uma grande proximidade às ideias de Battista (2007):

> Visualização é a capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre desenhos, imagens, diagramas, na nossa mente, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com o objetivo de representar e comunicar informação, pensar sobre e desenvolver ideias anteriormente desconhecidas e avançar na sua compreensão. (p. 217)

Para Gutiérrez (1996), a visualização é um tipo de “atividade de raciocínio baseado no uso de elementos visuais ou espaciais, tanto mentais como físicos, desenvolvida com vista à resolução de problemas ou demonstração de propriedades” (p. 9). A definição apresentada por este autor faz parte de um quadro conceptual em que procura caracterizar a atividade de visualização restrita à área da matemática, procurando unificar as propostas e a terminologia usada por vários autores (nomeadamente, Bishop, Dreyfus, Hoffer, Kosslyn, Presmeg e Yakmanskaya), integrando assim quatro elementos principais: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e capacidades de visualização. No que respeita ao vocabulário, considera equivalentes as expressões *imagem mental*, *imagem espacial* e *imagem visual*, assim como *visualização*, *visual imagery* e *pensamento espacial*.

Teorias sobre o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Uma teoria amplamente citada e utilizada em vários estudos diz respeito aos níveis de raciocínio geométrico de van Hiele. Trata-se de um modelo desenvolvido no final da década de 50 por um casal de educadores holandeses, Pierre van Hiele e Dina van Hiele, que descreve o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos. Segundo este modelo, os alunos progridem segundo níveis qualitativamente diferentes, discretos, sequenciais e hierárquicos (Battista, 2009; Clements, 2003). A apresentação dos níveis que se segue corresponde à formulação utilizada por Battista (2009) que procura refletir a investigação mais recente sobre este assunto:

Nível 1: Raciocínio holístico-visual. Neste nível, os alunos identificam, descrevem e raciocinam sobre as figuras e outras configurações geométricas de acordo com a sua aparência e como um todo. As justificações podem ser vagas, como dizer que duas figuras têm a mesma forma porque são parecidas, ou recorrer a protótipos, como justificar que uma figura é um retângulo porque parece uma porta. No primeiro nível, muitos alunos podem identificar corretamente as figuras mais comuns, enquanto outros não, sendo que a orientação da figura pode influenciar bastante o seu raciocínio.

Nível 2: Raciocínio analítico-descritivo. Neste nível, os alunos são capazes de conceptualizar e especificar as figuras descrevendo as suas componentes e as relações entre si. No entanto, os conceitos e as descrições dos alunos podem variar bastante no seu grau de sofisticação. Numa fase inicial, os alunos referem-se às partes das figuras e às suas propriedades usando linguagem informal e recorrendo à sua experiência do dia-a-dia. À medida que vão aprendendo os conceitos ensinados na aula de matemática, tais como paralelismo ou a medida de ângulos, vão construindo uma linguagem que combina descrições informais com termos formais, o que várias vezes é insuficiente para especificar completamente a figura. Finalmente, já usam uma linguagem que recorre estritamente a conceitos geométricos formais para descrever e conceptualizar as figuras e são capazes de apresentar um conjunto de propriedades que permitem especificá-las, ou seja, formulam e usam definições formais para classes de figuras. Porém, estas definições não são mínimas porque não relacionam propriedades ou não atendem a que um subconjunto de propriedades implica as restantes.

Nível 3: Raciocínio relacional-inferencial. No nível 3, os alunos já conseguem inferir relações entre as propriedades das figuras mas, de novo, o seu grau de sofisticação pode variar. Inicialmente, podem ter uma base empírica, ou seja, os alunos podem reparar que sempre que uma figura tem uma propriedade também tem outra. Posteriormente, podem compreender que a segunda propriedade é consequência da primeira por construção. Por exemplo, um retângulo tem sempre os lados opostos iguais dois a dois porque quando se constrói uma sequência de lados perpendiculares, estes têm mesmo de ser iguais. Finalmente, os alunos podem fazer inferências lógicas e é nesta fase que podem compreender a classificação hierárquica das figuras, muito embora possam resistir a adotá-la. A ideia de que um quadrado é um retângulo pode continuar a ser estranha, mesmo que consigam apresentar a justificação para tal relação. Só no fim do nível 3 é que estas relações se tornam claras e os alunos aprendem a compreender e apreciar as definições mínimas.

Nível 4: Demonstração formal. Neste nível, os alunos conseguem, num dado sistema axiomático, partir de um conjunto de dados e produzir uma sequência de afirmações que justificam logicamente uma conclusão. Compreendem a diferença entre axioma, definição e teorema.

Nível 5: Rigor. Neste nível, que habitualmente corresponde ao ensino superior, os alunos compreendem, usam e analisam sistemas axiomáticos alternativos.

Ao longo dos anos, muitos estudos utilizaram, testaram e reformularam os níveis de van Hiele, aplicando-os a outros contextos ou tópicos, mas focando-se principalmente nos primeiros níveis. Uma dessas adaptações foi proposta por Gutiérrez, Jaime e Fortuny (1991) e incide em figuras tridimensionais, mas mantendo a coerência com a formulação original para figuras do plano: nível 1 (reconhecimento), os sólidos são identificados visualmente e de forma holística, sem referência às suas componentes ou propriedades; nível 2 (análise), os alunos identificam componentes e propriedades nos sólidos que descrevem de modo informal, mas ainda não as relacionam logicamente nem conseguem classificar famílias de sólidos; nível 3 (dedução informal), os alunos conseguem classificar famílias de sólidos e compreender as suas definições, bem como apresentar argumentos informais para as suas deduções; nível 4 (dedução formal), os alunos compreendem o papel dos diferentes elementos num sistema axiomático e elaboram demonstrações envolvendo sólidos.

De maneira geral, a investigação em educação matemática tem mostrado que os níveis de van Hiele são úteis na descrição da aprendizagem de conceitos geométricos, especialmente figuras (Battista, 2009; Clements, 2003; Clements & Battista, 1992). A investigação em psicologia e nas neurociências tem também confirmado a ideia de que no reconhecimento de um objeto, primeiramente é processada a sua forma global e só depois as suas partes. Na verdade, estas são também identificadas inicialmente, bem como algumas das suas relações, porém não estão explicitamente acessíveis ao indivíduo (Kosslyn, citada em Battista, 2007). Contudo, o aprofundamento da teoria de van Hiele conduziu frequentemente a dificuldades de interpretação ou falhas de consistência. Por exemplo, algumas investigações sugerem que os alunos podem estar em diferentes níveis consoante o tópico em causa (por exemplo, quadriláteros e triângulos versus transformações geométricas) e que essas diferenças podem estar relacionadas com as experiências de aprendizagem que tiveram; também dentro do mesmo tópico, os alunos podem desenvolver raciocínios próprios de níveis diferentes uma vez que "as pessoas não se comportam de uma forma simples e linear, tal como a atribuição de um único nível nos levaria a expectar" (Gutiérrez et al., 1991, p. 250); finalmente, os alunos podem desenvolver simultaneamente tipos de raciocínio característicos de diferentes níveis, mas a ritmos diferentes (Battista, 2009), o que leva alguns investigadores a questionarem a interpretação comum que apresenta os níveis de van Hiele como discretos (Lehrer, Jenkins & Osana, 1998).

Para Clements (2003), a investigação mostra que o progresso ao longo dos níveis pode corresponder genericamente à descrição proposta, mas conceptualizar o desenvolvimento do pensamento geométrico como sendo estritamente visual ou estritamente analítico-descritivo pode não ser nem preciso nem adequado para a teoria ou para a prática educativa. Apesar das sucessivas investigações que utilizaram o modelo de van Hiele sugerirem algumas limitações, a sua consistência e validade em termos gerais sugere que se tenham em conta várias implicações importantes para o ensino, até porque o progresso nos diferentes níveis parece depender sobretudo da forma como se aprende. Uma das ideias importantes é que não é possível construir atalhos que rapidamente conduzam a níveis mais elevados. Por vezes, consequência de diferentes circunstâncias, os professores podem reduzir os conteúdos a ensinar, o seu grau de profundidade, ou usar uma estratégia mais rápida que conduza sobretudo à memorização, mas os alunos não podem saltar níveis e atingir igualmente a compreensão. Outra implicação diz respeito à comunicação na sala de aula, já que a cada nível corresponde a um tipo de linguagem e, também ela, tem a sua hierarquia.

Ainda com inspiração na teoria de van Hiele, Battista (2009) formulou uma categorização sobre o raciocínio geométrico que tem como ponto de partida a abstração:

> A abstração é o processo através do qual a mente regista objetos, ações e ideias na consciência e na memória. Uma vez abstraídos a um nível suficientemente profundo, torna-se possível operar mentalmente sobre os objetos, ações ou ideias (por exemplo, compará-los, decompô-los e analisá-los). (Battista, 2009, p. 94)

Na perspetiva de Battista (2009), para que seja possível operar mentalmente com objetos geométricos (por exemplo, compará-los, decompô-los e analisá-los), é necessário que estes tenham sido abstraídos a um nível suficientemente profundo, o que envolve a *estruturação espacial* — o primeiro de três níveis com graus de sofisticação diferentes, em que a ideia de estruturação se constitui como eixo organizador: a *estruturação espacial*, a *estruturação geométrica* e a *estruturação lógica/axiomática*.

A *estruturação espacial* é um tipo especial de abstração correspondente ao ato mental de construir uma organização ou uma configuração para um objeto ou conjunto de objetos. Inclui identificar unidades, relações entre as unidades e reconhecer que um subconjunto de objetos, devidamente repetidos, pode gerar o conjunto todo (Battista &

Clements, 1996). A *estruturação espacial* está assim associada a um modelo mental, ou seja, uma versão visual, não-verbal, da situação (objeto, ação…) que tem uma estrutura isomórfica à estrutura percecionada da situação e que é ativada para interpretar e raciocinar sobre ela (Battista, 2007).

A *estruturação geométrica* descreve a *estruturação espacial* através de conceitos formais, tais como congruência, paralelismo, ângulo, transformações geométricas ou sistemas de coordenadas. Assim, um paralelogramo pode ser estruturado espacialmente como uma configuração visual consistindo em dois pares de lados opostos iguais. Já a *estruturação geométrica* torna esta visão explícita em termos verbais através de conceitos apropriados: lados opostos congruentes e paralelos. A *estruturação geométrica* assenta na *estruturação espacial*, isto é, para que seja possível estruturar geometricamente um objeto, é necessário que o indivíduo tenha interiorizado a estruturação espacial correspondente, o que implica que esta já tenha atingido um nível de abstração que permita abstrair-se do seu contexto inicial e seja aplicável a novas situações. De outra forma, a *estruturação geométrica* não tem significado para o indivíduo.

A *estruturação lógica/axiomática* organiza formalmente os conceitos geométricos num sistema para que as suas relações possam ser estabelecidas através de dedução lógica. Para operar a este nível, é necessário que a *estruturação espacial* atinja um nível "simbólico", ou seja, as afirmações verbais ou simbólicas podem substituir os próprios modelos mentais. Para atingir este nível de estruturação, os indivíduos têm de conseguir organizar logicamente um conjunto de propriedades e deduzir que, por exemplo, se um quadrado possui a propriedade lados paralelos dois a dois, a qual define um paralelogramo, então um quadrado é um paralelogramo.

Definir em geometria. Em matemática, uma teoria começa com termos primitivos e axiomas, a partir dos quais todas as outras noções são definidas e os teoremas são demonstrados, usando as regras do raciocínio lógico. Este encadeamento diz respeito à forma como o conhecimento está organizado, mas não reflete a forma como a matemática é criada ou como é aprendida, o que na prática pode ser conflituoso (de Villiers, Govender, & Patterson, 2009; Pólya, 1975; Vinner, 1991). Em geometria, ao contrário do lugar que o ensino direto reserva às definições, Freudenthal (1973) sugere que os alunos se envolvam na atividade de definir. De Villiers (1998) argumenta até que, para compreender realmente o significado e as características das definições em geometria e dos conceitos em causa, é necessário o envolvimento na atividade de definir. Na sua perspetiva,

> a construção de definições (definir) é uma atividade matemática tão importante como outros processos tal como resolver problemas, formular conjeturas, generalizar, especializar, provar, etc. e, consequentemente, é estranho que na maioria das vezes seja negligenciada no ensino da matemática. (p. 249)

De facto, há vários fatores que nos fazem questionar a eficácia de um ensino de vários conceitos geométricos que começa pela apresentação das suas definições formais. Por exemplo, Vinner (1983) afirma que, quando ouvimos ou lemos o nome de um conceito que conhecemos, ou quando resolvemos uma tarefa, a nossa memória é estimulada e evoca algo. Contudo, raramente aquilo que evoca é a definição formal do conceito, mas antes um conjunto de representações visuais, imagens, propriedades ou experiências — um conjunto que constitui aquilo a que chama *conceito-imagem*. O *conceito-imagem* pode incluir várias representações que o indivíduo recorda como exemplos do conceito e um conjunto de propriedades a ele associadas. Evocar o *conceito-imagem* ao invés da definição formal pode ocorrer com particular incidência no caso de muitas figuras geométricas com as quais nos familiarizamos desde crianças, da mesma forma com que nos familiarizamos com os conceitos naturais. Ou seja, começamos a conhecer o conceito “retângulo” da mesma forma que conhecemos o conceito “porta” — por exposição a vários exemplos — e não pela sua definição (Battista, 2009).

Um *conceito-imagem* é considerado viável se permite descriminar todos os possíveis exemplos do conceito e quando as suas propriedades são todas consideradas necessárias. No entanto, as propriedades incluídas no *conceito-imagem* podem não ser todas corretas e até podem incluir propriedades físicas irrelevantes, especialmente se os alunos se encontram no nível 1 de van Hiele. Por exemplo, a representação mental de um triângulo retângulo corresponde na maioria das vezes a um triângulo cujos lados perpendiculares estão na vertical e na horizontal, o que inibe muitos alunos de identificarem outros triângulos retângulos que não correspondam a este caso ou impede que raciocinem sobre eles sem que alterem a sua posição (Presmeg, 1992).

Assim, apesar de todos os exemplos de um conceito serem matematicamente equivalentes, eles são diferentes do ponto de vista visual e psicológico, tendendo a existir “super-exemplos”. Esta restrição dos conceitos a um conjunto de elementos que é utilizado de forma recorrente é frequentemente designada por efeito protótipo e tem sido estudado por vários investigadores (por exemplo, Fujita, 2012; Hershkowitz, 1989;

Presmeg, 1992; Yu, Barrett e Presmeg, 2009). De maneira geral, muitos dos estudos existentes sobre o efeito protótipo mostram a sua influência negativa nas aprendizagens, contudo, é preciso ter em conta que, habitualmente, os indivíduos não assimilam qualquer exemplo de um conceito sem que antes tenham adquirido um exemplo protótipo como referência (Hershkowitz,1989). Desta forma, Clements (2003) considera que os alunos devem trabalhar com um vasto leque de exemplos dos conceitos e que o seu envolvimento na atividade de definir pode ser decisivo para evitar o efeito protótipo.

Winicki-Landman e Leikin (2000) apontam os princípios lógicos que orientam o processo de definir em matemática: (i) definir implica atribuir um nome; (ii) para definir um conceito novo, só podemos utilizar conceitos previamente definidos; (iii) uma definição estabelece um conjunto de condições necessárias e suficientes para identificar o conceito; (iv) o conjunto das condições deve ser mínimo; e (v) as definições são arbitrárias. No campo da geometria, Mariotti e Fischbein (1997) consideram que este processo tem uma complexidade acrescida devido às características específicas dos conceitos geométricos que conduzem a um movimento duplo e simultâneo entre o nível conceptual e o figurativo, passando por um conjunto de passos que podem ser sumariados da seguinte forma:

> Observar; identificar as principais características; enunciar propriedades de acordo com estas características; voltar à observação, verificar a definição no que respeita às diferenças figurativas, e assim sucessivamente . . . O processo de elaborar a definição consiste num duplo processo partindo do particular para o geral e vice-versa, do geral para o particular. (p. 227)

A construção de uma definição para um conjunto de objetos geométricos implica assim identificar os atributos que são comuns ao conjunto e fazer uma generalização de modo a chegar a uma condição necessária, usando raciocínio indutivo; para que a condição seja também suficiente, é necessário que a mesma implique o conjunto de objetos em causa, o que envolve raciocínio dedutivo. Adicionalmente, para que o conjunto seja mínimo, mobilizamos raciocínio dedutivo de forma a assegurar que nenhuma condição pode ser deduzida de outras. Desta forma, como afirmam estes autores, o processo de definir deve ser considerado quer do ponto de vista do raciocínio geométrico, quer da atividade matemática, envolvendo um papel criativo e construtivo.

Classificar em geometria. A importância da organização dos conceitos em classes é tão importante quanto a da sua definição. Um exemplo interessante que ilustra esta ideia é a história dos poliedros regulares, também conhecidos por sólidos platónicos.

Segundo Veloso (1998), antes de Platão já os pitagóricos conheciam aqueles sólidos, mas parece dever-se a este o seu estudo teórico. Como afirmam Mariotti e Fischbein (1997), há uma pré-história dos poliedros regulares em que estes sólidos foram investigados como objetos individuais, sem que lhes fosse reconhecida a ideia unificadora de regularidade que lhes é comum. Contudo, a sua verdadeira história começa quando se reconhece a existência deste conceito; ou seja, a descoberta crucial foi a classe dos poliedros regulares e não tanto a descoberta de cada um deles individualmente.

Comecemos por estabelecer um entendimento sobre o que significa classificar em geometria. Para Mariotti e Fischbein (1997), classificar consiste em estabelecer uma equivalência entre objetos com características visuais comuns, mas também diferentes, com vista a uma generalização. Por outras palavras, consiste em identificar as propriedades comuns e pertinentes que determinam uma categoria. Vejamos um exemplo: um octaedro regular e um tetraedro regular são sólidos diferentes, mas com propriedades comuns — ambos têm faces congruentes, com a forma de polígonos regulares e com o mesmo número de faces a convergir em cada vértice. É a identificação destas propriedades comuns (os atributos críticos, usando a terminologia de Hershkowitz, 1989) que permite incluí-los na classe dos poliedros regulares. Contudo, o tetraedro regular também pertence à classe das pirâmides e o octaedro regular à classe das bipirâmides, sendo estas classes disjuntas, pelo que, considerando outros critérios, os dois sólidos podem não pertencer à mesma classe. De notar que quer o tetraedro, quer o octaedro, têm todas as faces triangulares, contudo essa é uma propriedade de que gozam mas que é irrelevante para as classes já referidas por não ser é um atributo crítico (seria sim para a classe dos deltaedros).

Nesta atividade, identificamos aspetos relacionados com o processo de definir, pois o tetraedro inclui-se na classe dos poliedros regulares uma vez que cumpre a sua definição (dada pelas condições anteriormente formuladas). Contudo, além de identificar as propriedades comuns e pertinentes que determinam uma categoria, classificar implica ainda comparar objetos entre si com vista a uma organização. Assim, tendo como ponto de partida a proposta de Mariotti e Fischbein (1997), considero que classificar significa estabelecer uma organização entre objetos diferentes, tendo por referência a identificação das suas características comuns — os atributos críticos. Consoante esta organização, um objeto pertence a uma classe se respeitar todos os seus atributos críticos. O objetivo da atividade de definir é estabelecer quais são esses atributos. Voltando ao exemplo dos poliedros regulares, a identificação de um conjunto de propriedades comuns aos cinco sólidos conduziu à sua organização numa classe especial; a identificação dessas propriedades constitui a definição de poliedro regular.

Esta proximidade entre os processos de definir e classificar é notada por de Villiers et al. (2009), que afirmam existir uma dependência mútua entre eles, na medida em que "a classificação de um conjunto qualquer de objetos envolve, implícita ou explicitamente, definir os conceitos implicados, enquanto definir conceitos implica, de certa forma, automaticamente a sua classificação" (p. 191).

Tal como no processo de definir, a especificidade do processo de classificar em geometria deriva dos objetos com que lida. De acordo com Mariotti e Fischbein (1997), as classificações formais recorrem frequentemente a critérios estruturais que não são imediatamente claros e estão longe dos critérios percetuais aos quais estamos habituados a remeter a atividade espontânea de classificar. Por exemplo, se matematicamente não faz sentido colocar na mesma classe retângulos e paralelepípedos retângulos, é natural que os indivíduos os considerem como tendo a "mesma forma". Além disso, ao declararmos uma equivalência entre objetos da mesma classe, atendemos às semelhanças que os objetos têm entre si mas precisamos de ignorar as suas diferenças, o que entra em conflito com a necessidade natural de diferenciação entre objetos. Ou seja, ao classificarmos um prisma como reto é irrelevante a sua altura, assim como se a sua base é ou não um polígono regular, côncavo ou convexo, pois apenas temos de atender à posição relativa das arestas laterais com a base. A tendência natural é exatamente a contrária, isto é, os indivíduos tendem a acrescentar atributos desnecessários ou falsos às figuras com base numa figura protótipo, o que Hershkowitz (1989) afirma ter por base dois tipos de comportamento: *julgamento prototípico de tipo 1* — o exemplo protótipo é usado como base, mas o julgamento foca-se na sua representação visual; *julgamento prototípico de tipo 2* — o exemplo protótipo é usado como base, mas o julgamento tem por base as suas propriedades, que o indivíduo tenta impor a outros exemplos da mesma classe. Por exemplo, neste nível de compreensão, um aluno pode afirmar que um retângulo não é um paralelogramo porque não é "inclinado" (julgamento tipo 1) ou argumentar no mesmo sentido, dizendo que o paralelogramo não tem ângulos retos (julgamento tipo 2). Em ambos os casos, o exemplo prototípico é considerado "**o** representativo do conceito" (negrito no original) e os restantes casos são julgados pela sua "distância" relativamente a esse representante. Ao contrário destes comportamentos, o desejável é desenvolver um julgamento de tipo analítico (tipo 3) em que "os atributos críticos são usados como referência na formação dos conceitos" (p. 74).

Justificar em geometria. A perspetiva sobre o processo de justificar proposta por Lannin et al. (2011), referida anteriormente, inclui os papéis de validação e de compreensão de resultados e uma dimensão comunicativa que busca a legitimidade da atividade matemática — aspetos que associamos à demonstração. Na verdade, os conceitos de justificação e demonstração são muito próximos, o que deriva de a demonstração assumir vários significados, quer no âmbito da investigação em educação matemática (Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016), quer em matemática, onde existem perspetivas diversas sobre o seu papel e o que a torna aceitável (Hanna, 2000; Harel & Sowder, 2007). Tradicionalmente, o termo demonstração aparece associado a um elevado grau de formalismo e de complexidade próprios do ensino secundário ou superior, uma perspetiva contrariada por alguns autores que propõem um significado mais abrangente, embora nem sempre claro, para o termo demonstração. Por exemplo, Harel e Sowder (2007) assumem o *carater subjetivo* (itálico dos autores) da sua perspetiva, segundo a qual uma demonstração é aquilo que estabelece a verdade para uma pessoa ou uma comunidade, podendo permear todo o currículo de matemática, começando pelo jardim-de-infância. Tendo em vista conceptualizar a demonstração incluindo os primeiros anos de escolaridade, Stylianides (2007) propõe uma definição fundada na literatura sobre filosofia da matemática e educação matemática:

> Uma demonstração é um argumento matemático, uma sequência de afirmações interligadas, a favor ou contra uma afirmação matemática, com as seguintes características: 1. Usa afirmações aceites na comunidade da sala de aula (um conjunto de afirmações aceites) que são verdadeiras e disponíveis sem justificação adicional; 2. Emprega formas de raciocínio (modos de argumentação) que são válidas e conhecidas, ou ao alcance conceptual, da comunidade de sala de aula; e 3. É comunicada usando formas de expressão (modos de representação de argumentos) que são apropriadas e conhecidas, ou ao alcance conceptual, da comunidade de sala de aula. (p. 291)

Neste estudo utilizo o termo "justificação" (no sentido de justificação válida) com o significado aqui atribuído por Stylianides para "demonstração", de forma incluir formas de argumentação com diferentes graus de formalidade e referentes a vários níveis de escolaridade. Considero ainda que uma demonstração é uma forma de justificação.

Existem vários aspetos que nos levam a considerar a especificidade das justificações em geometria. Como refere Niss,

> provavelmente, não há melhor lugar do que a geometria para elucidar e discutir o conceito e a função da demonstração e de demonstrar em matemática. Todas as noções e variantes de raciocínio, justificação e prova estão presentes em medidas opulentes no contexto da geometria. (1998, p. 313)

Além da diversidade de raciocínios, Hanna (2000) assinala que noutras áreas é frequente que os teoremas tenham de ser demonstrados por métodos “não explicativos”, como a redução ao absurdo ou a indução matemática. Já a geometria “goza de uma posição especial neste aspeto, pois a maioria das demonstrações são explicativas” (p. 9), isto é, permitem compreender porque é que a conjetura formulada é verdadeira.

Possivelmente, a especificidade do processo de justificar em geometria está associada a dois dos aspetos referidos por Stylianides: os modos de argumentação e de comunicação, os quais estão intrinsecamente ligados à dimensão visual dos objetos geométricos. Como já referi, a busca pelo rigor na matemática a partir do séc. XIX tornou os argumentos visuais ilegítimos no estabelecimento da demonstração. Esta posição tem-se vindo a alterar, mas como referem Hanna e Sidoli (2007), ainda coexistem perspetivas opostas: num extremo, alguns autores consideram que as representações visuais poderão ser apenas um complemento ou um auxiliar à demonstração; no outro extremo, alguns autores consideram que estas podem constituir em si mesmo a demonstração. Seja com que grau de participação for, o papel das representações acarreta alguma especificidade para o raciocínio a realizar, tal como Tall et al. (2012) reconhecem ao afirmar que existem três categorias distintas de prova: i) utilização de figuras, diagramas, transformações e dedução em geometria; ii) utilização de regras aritméticas estabelecidas na álgebra; e iii) a utilização de estruturas definidas axiomaticamente, próprias da investigação matemática ao nível universitário.

Termino esta secção sobre raciocínio geométrico com um problema apresentado por Fischbein (1993) (Figura 3) e que capta vários dos elementos característicos do raciocínio geométrico atrás elencados:

> Numa circunferência com centro em O traçamos dois diâmetros perpendiculares [AB] e [CD]. Escolhemos arbitrariamente um ponto M na circunferência e traçamos as perpendiculares [MN] e [MP] aos dois diâmetros. Qual é o comprimento de [PN]? (p. 142)

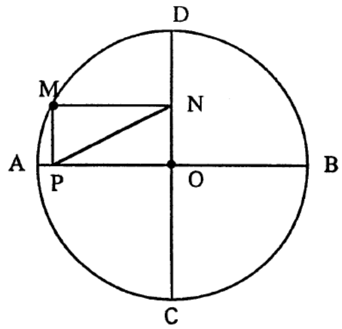


Figura 3. Problema sobre o comprimento do segmento [PN]. Retirado de Fischbein (1993, p. 142)

A primeira abordagem ao problema implica a interpretação do diagrama, em particular, pelo facto de se tratar de uma representação de uma família de figuras, já que o ponto M é arbitrário. Em segundo lugar, é necessário proceder à interpretação visual da informação para criar imagens mentais e a interpretação dessas imagens mentais para gerar informação (Gutiérrez, 1996). Neste caso, destaca-se a consciência de que [MPON] é um retângulo e que [PN] é uma diagonal desse retângulo. Tratam-se de elementos representados no diagrama mas que podem não ser identificados dessa forma, se não os "virmos" destacados dos restantes elementos. Mais ainda, o raio [MO] não está representado, mas é determinante "vê-lo" e identificar a sua relação com [PN], ou seja, que ambos são diagonais do retângulo, logo são congruentes. Recorrendo ao raciocínio espacial e à estruturação espacial identificamos componentes do objeto e a forma como se relacionam (Battista, 2007), chegando à descoberta que [PN] tem o mesmo comprimento que o raio do círculo. Vale ainda a pena voltar à ideia de que se trata de uma família de figuras e que [MPON] é sempre um retângulo (o que inclui o caso em que é um quadrado, quando [MN] é congruente com [MP]), excluindo as situações em que M coincide com A, B, C ou D (em que é óbvio que [PN] corresponde ao raio). Desta forma, a consideração deste número infinito de casos implica identificar as propriedades invariantes que são resultado das condições do problema (Johnston-Wilder & Mason, 2005).

A resolução deste problema constitui assim um exemplo característico de mobilização de raciocínio geométrico, por convocar ideias centrais anteriormente referidas: a especificidade dos objetos geométricos e das suas representações, a mobilização de raciocínio espacial que nos permite identificar elementos e relações entre esses elementos, a formulação de uma generalização por se tratar de uma família infinita de casos, a realização de uma justificação que é explicativa (aliás, a própria resolução do problema implica compreender o porquê, a não ser que o resolvamos com recurso a um AGD) e ainda a consideração da classe dos retângulos. Trata-se de uma situação em que o recurso ao raciocínio espacial é a chave para a resolução do problema e onde a ideia de *insight* sugerida por Atiyah (1982) é absolutamente pertinente. A resolução é simples, possível de realizar ou pelo menos de ser compreendida por muitos alunos, e mostra-nos como o raciocínio espacial constitui, em determinadas situações, não apenas um bom recurso, mas o único acessível.

Matemática para ensinar

A natureza do conhecimento matemático para ensinar. Ao longo de mais de um século, têm surgido diferentes perspetivas no que respeita ao conhecimento que o professor tem ou deve ter. Como refere Shulman (1986), passou-se de uma ênfase quase exclusiva nos conteúdos a lecionar, à sua desvalorização em detrimento de outras capacidades, como técnicas de ensino. Na sua perspetiva, "a simplificação da complexidade do ensino, levou os investigadores a ignorarem um aspeto central na vida da sala de aula: o conteúdo" (p. 6). Shulman defendia então a necessidade de um quadro conceptual que valorizasse as várias dimensões do conhecimento pois, no seu entender, sem o equilíbrio de ambas, o domínio de conteúdos ou de técnicas pode ser inútil. Desta forma, o autor propôs uma classificação do conhecimento que distingue três categorias: conhecimento do conteúdo, conhecimento didático[4] e conhecimento do currículo. O conhecimento do conteúdo refere-se ao conhecimento disciplinar que os professores ensinam e que deve ir além do domínio de factos ou procedimentos:

> [D]evem ser capazes de explicar por que razão uma proposição em particular é considerada válida, porque vale a pena conhecê-la, como se relaciona com outras proposições, tanto no âmbito da disciplina como fora, tanto na teoria como na prática . . . Precisa não apenas de compreender que algo é assim; o professor deve ainda compreender porque é assim. (p. 9)

A segunda categoria proposta por Shulman (1986) vai além do conhecimento do conteúdo *per si* e entra na dimensão do *conhecimento para ensinar* (itálicos do autor). Assim, o conhecimento didático inclui "as formas de representar e formular um assunto que o tornam compreensível para os outros . . . Inclui também uma compreensão dos motivos que tornam a aprendizagem de um tópico específico fácil ou difícil" (p. 9).

[4] Tradução de *pedagogical content knowledge*.

Finalmente, na categoria de conhecimento do currículo, Shulman inclui o conhecimento relativo às orientações programáticas para ensinar cada tópico e à variedade de materiais disponíveis que apoiam o ensino.

Com esta categorização, Shulman contribuiu em grande medida para uma mudança no paradigma da investigação sobre o conhecimento do professor e para uma nova visão sobre o que este deve saber. As suas críticas renovaram o interesse no conhecimento disciplinar, particularmente na perspetiva de conhecimento para ensinar. Partindo das ideias deste autor, Ball, Thames e Phelps (2008) procuram aprofundar a caracterização do conhecimento necessário ao ensino da matemática, tendo em atenção as práticas letivas e o conhecimento que observaram ser mobilizado pelos professores. Como resultado, propõem um mapeamento das duas principais categorias de Shulman (1986) — o conhecimento didático e conhecimento matemático.

De acordo com Ball et al. (2008), a categoria relativa ao conhecimento didático é subdividida em duas: *o conhecimento do conteúdo e do seu ensino* e o *conhecimento do conteúdo e dos alunos*. Nesta categoria não existe propriamente uma conceptualização diferente do conhecimento didático, já que aqueles investigadores descrevem as duas subcategorias usando justamente as palavras de Shulman (1986) para descrever este conhecimento. Já no que se refere ao conhecimento matemático, Ball et al. (2008) propõem uma separação em duas categorias principais: o *conhecimento comum do conteúdo* e o *conhecimento especializado do conteúdo*. O *conhecimento comum* distingue-se do *especializado* porque este é único no contexto de ensino. O conhecimento comum habilita-nos, por exemplo, a resolver tarefas matemáticas que se colocam também a outras atividades ou permite-nos reconhecer um erro, enquanto a identificação da natureza do erro requer conhecimento especializado. O conhecimento especializado do conteúdo é a categoria que os autores realçam como um conhecimento que emerge da prática com particular relevância, para o qual oferecem vários exemplos que ilustram a sua especificidade: identificar os significados das operações envolvidas em diferentes problemas, reconhecer as vantagens e as limitações de utilizar retângulos ou círculos para comparar frações, analisar definições equivalentes ou estabelecer definições alternativas para um conceito, são alguns exemplos que evidenciam não se tratar apenas de um conhecimento conceptual ou mais profundo dos mesmos conteúdos, mas sim de um conhecimento diferente.

Finalmente, ainda referente ao conhecimento matemático, Ball et al. (2008) sugerem também o interesse de considerar a subcategoria *conhecimento do "horizonte matemático"* que fornece uma visão sobre a forma como os tópicos matemáticos se relacionam na matemática e ao longo do currículo. Já na dimensão didática, os autores colocam ainda *o conhecimento do conteúdo e do currículo*, correspondente ao conhecimento do currículo de Shulman (1986). Estas duas subcategorias ilustram como pode haver uma distinção muito ténue entre alguns conceitos propostos pelos autores. Na verdade, como estes reconhecem, uma ação do professor pode envolver vários tipos de conhecimento. Contudo, o que sublinham é a existência de uma forma de conhecimento matemático "puro", no sentido em que é independente do conhecimento dos alunos, do currículo ou da pedagogia.

A incidência no conhecimento matemático dos professores é também uma característica do trabalho de Ma (2009) que contribuiu igualmente para o interesse nesta dimensão do conhecimento. No estudo em que compara a compreensão matemática de professores do ensino básico chineses e americanos (os primeiros com muito menos tempo de formação que os últimos, mas com uma formação de outra natureza), no que respeita às práticas de ensino na sala de aula, a investigadora identificou que os professores chineses revelavam um conhecimento conceptual, ao contrário do conhecimento dos seus congéneres americanos que tendiam a revelar um conhecimento de natureza procedimental. Esta diferença, também identificada no conhecimento dos alunos daquelas nacionalidades pelos estudos internacionais, conduziu Ma a defender que o professor do ensino básico deve desenvolver uma *compreensão profunda da matemática fundamental*. Por "fundamental", pretende significar que a matemática é básica (assente nos pilares da aritmética e geometria — a base da matemática), primária (contém os rudimentos de conceitos muito importantes noutros ramos mais avançados) e elementar (corresponde às primeiras aprendizagens da matemática e parece fácil e clara), permitindo assim desenvolver nos alunos os alicerces para as aprendizagens futuras. Por "compreensão profunda", Ma pretende vincar a ideia que o conhecimento deve ser completo, amplo e abrangente. Desta forma, um professor que conhece um tópico em profundidade sabe articulá-lo com as ideias conceptualmente mais poderosas, estabelece conexões entre conceitos e procedimentos, valoriza a utilização de diferentes abordagens para chegar a uma solução e procura dar sentido ao que conhece.

A perspetiva de que o conhecimento matemático do professor é específico da sua profissão leva Stylianides e Stylianides (2010) a propor uma conceptualização desta área como "uma forma de matemática aplicada". Assim entendida, a expressão *matemática para ensinar* refere-se

> ao conteúdo matemático que é (ou pode ser) *útil para* ou *usado no* ensino da matemática (o domínio de aplicação), e, consequentemente, importante para os professores saberem e serem capazes de usar quando ensinam matemática (i.e., quando atuam no domínio de aplicação). (p. 163)

Loureiro (2004) discute algumas situações que ilustram bem a perspetiva do conhecimento matemático útil para ensinar, no sentido de um conhecimento matemático que apoia o conhecimento didático. A orientação de partir do conhecimento dos alunos e valorizá-lo ou de atender à diversidade dos seus conhecimentos e capacidades, constituem exemplos poderosos. Na perspetiva da autora, ambas as orientações encontram na resolução de problemas, nas investigações e projetos, vias profícuas para "construir paisagens diversificadas" (p. 111), contrariando o *síndrome da planície matemática*, uma metáfora de Cuoco (2001) para descrever um ensino em que todos os assuntos são tratados ao mesmo nível e de igual maneira por todos. De forma a transformar a planície numa "paisagem com montes e vales", o professor pode diversificar os problemas introduzindo variantes, recorrendo a estratégias como acrescentar ou retirar condições, generalizar o problema, situá-lo num contexto diferente… Da mesma forma, um professor deve estar apto para avaliar os contributos dos seus alunos e propor tarefas que deem continuidade ao seu pensamento. Contudo, para que isso aconteça, o conhecimento didático tem de estar suportado num sólido conhecimento matemático.

Desta forma, as perspetivas anteriores sugerem a importância e o reconhecimento da especificidade do conhecimento matemático para a docência. De facto, a assunção da necessidade de formação matemática para ensinar como específica da profissão tem consequências importantes, em particular para a formação inicial dos professores nesta área, que abordarei no ponto seguinte.

O desenvolvimento do conhecimento matemático na formação inicial de professores. Albuquerque et al. (2005) recomendam que a formação matemática dos futuros professores contemple o estudo daquela disciplina de um ponto de vista superior e um "estabelecimento claro das suas relações com a matemática que se vai ensinar" (p. 14), sugerindo assim que o currículo da formação dos futuros professores não deve coincidir com o de qualquer outro profissional, nomeadamente nas disciplinas incidentes na matemática. Esta orientação é consistente com o consenso que se estabeleceu, em educação matemática, de que o foco deve estar na matemática que os professores ensinam e que "não se trata simplesmente de oferecer mais matemática aos futuros professores, mas, mais importante, permitir-lhes que compreendam e reconstruam aquilo que sabem com maior profundidade e significado" (Ponte & Chapman, 2008, p. 230).

Estas recomendações ganham particular importância se considerarmos, como lembra Loureiro (2004), que os professores dos primeiros anos, em particular os do 1.º ciclo, muitas vezes revelam deficiências significativas sobre o conhecimento que deveriam ter adquirido durante a sua escolarização, têm capacidades mal exploradas e atitudes negativas face à matemática. Nesse sentido, sendo o tempo de formação em matemática muito limitado, é decisivo ajudá-los a compreender a matemática e dar-lhes condições para continuarem a aprender depois de terminada a sua formação inicial. Para a autora, isto implica promover experiências de aprendizagem que contrariem estes constrangimentos e favoreçam o desenvolvimento de conceções, atitudes e capacidades positivas, o que só será possível se os futuros professores forem agentes ativos construtores de conhecimento. Estas experiências matemáticas devem ser coerentes com um clima de cultura matemática em que haja apelo ao raciocínio matemático, pois "será impossível pedir a alguém que implemente um clima de cultura matemática se essa pessoa nunca tiver vivenciado esse tipo de clima" (p. 106).

Também Watson e Mason (2007) sugerem que o trabalho a desenvolver deve partir de tarefas matemáticas que promovam o pensamento matemático dos futuros professores e desenvolvam a sua perceção sobre o poder dessas tarefas, promovam a reflexão sobre a experiência de fazer matemática, questionem as abordagens centradas em procedimentos rotineiros e incluam oportunidades para observar e analisar o trabalho dos alunos. A sugestão destes autores relativa à natureza e poder das tarefas matemáticas está intimamente ligada a uma outra orientação: na formação inicial, os futuros professores devem aprender segundo os mesmos métodos que se preconiza que venham a utilizar nas suas práticas (Albuquerque et al., 2005; Ponte & Chapman, 2008; Serrazina, 2005). Como explica Serrazina (2005), os futuros professores chegam à formação inicial com um modelo implícito que inclui um conhecimento didático que adquiriram enquanto alunos. Já em formação, aprendem daqueles que são responsáveis pela sua formação um "modelo didáctico de referência que sustenta a acção do formador e que se transmite implicitamente na sua própria actuação" (p. 308). Desta forma, a autora defende que

> devem ser proporcionadas experiências que lhes permitam desenvolver perspetivas sobre a natureza da matemática, fomentar a sua predisposição para fazer matemática e promover a sua autoconfiança para aprender matemática de modo independente, e o envolvimento em experiências de resolução de problemas e em actividades de natureza investigativa é imprescindível. (p. 308)

Cuoco (2001) sugere ainda que um bom programa de formação deve cumprir um conjunto de condições: ter um design coerente e objetivos orientadores; apresentar a matemática como algo que nós fazemos e não que memorizamos; dar ênfase a hábitos de pensamento próprios dos matemáticos; envolver os futuros professores na cultura matemática, uma cultura com história, com a sua própria estética e até humor; promover as interações entre formandos e formador; e respeitar a ideia de que os problemas devem preceder a abstração e o que o pensamento dos formandos deve estar no centro do trabalho.

Além do isomorfismo entre os métodos com que devem aprender e os que deverão implementar no seu futuro profissional, nos últimos anos tem-se observado uma tendência para a articulação explícita entre conhecimento matemático e didático, que está presente em vários programas de formação e investigações realizadas nesses contextos, revelando resultados interessantes (Branco, 2013; Ponte & Chapman, 2008; 2016). Por exemplo, Stylianides e Stylianides (2010) sugerem tarefas que apresentem as seguintes características: 1) o foco principal é um objeto matemático que pode tomar diferentes formas; 2) o objeto matemático relaciona-se com ideias matemáticas que são *fundamentais* (no sentido de básicas e primárias, na formulação de Ma, 2009) e são ideias *difíceis de aprender*, para as quais existem vários mal-entendidos (apresentam como exemplos de objetos a generalização, justificação, aspetos relacionados com a linguagem matemática e as definições); e 3) existe um foco didático que é secundário mas significativo, relacionando o objeto matemático com a matemática escolar, e que pode ser contemplado a partir de registos de episódios de sala de aula.

No que respeita especificamente ao desenvolvimento do raciocínio, Stylianides e Stylianides (2006) fundamentam a necessidade de lhe dedicar uma especial atenção na formação inicial. Por um lado, consideram que existe uma ligação estreita entre a atividade de *raciocinar e justificar*[5] e *atribuir sentido*[6], a qual permite tornar as aprendizagens significativas. A atividade de *raciocinar e justificar* compreende várias

[5] Tradução de *reasoning and proving*.
[6] Tradução de *sense making*.

outras atividades, como a identificação de padrões, formulação de conjeturas, apresentação de argumentos e desenvolvimento de justificações, o que corresponde à estrutura típica da atividade dos alunos (e dos matemáticos) quando eles começam por explorar um fenómeno matemático para o compreender. Por outro lado, vários estudos mostram que os professores, particularmente os que lecionam no ensino básico, revelam dificuldades em raciocinar que os impede de desenvolver um ensino que valorize esta componente nas suas práticas. Desta forma, os autores propõem um conjunto de orientações sobre o desenvolvimento do raciocínio na formação inicial, centrada em quatro ideias: 1) os padrões favorecem a construção de conjeturas que, por sua vez, motivam a formulação de argumentos que se podem ou não qualificar como justificações, pelo que os futuros professores devem aprender distingui-los; 2) o raciocínio está delimitado pelo conhecimento, logo os professores devem evidenciar a flexibilidade que lhes permita identificar os recursos disponíveis aos alunos para se envolverem em raciocínio e organizar o seu ensino em coerência com esses recursos. Isto significa, por exemplo, conhecer múltiplas formas de definir um conceito ou justificar uma afirmação, de forma a acomodar as necessidades e limitações do conhecimento dos alunos; 3) as definições matemáticas são centrais na atividade de *raciocinar e justificar*, o que implica compreender o seu papel no desenvolvimento de uma compreensão partilhada dos conceitos matemáticos e na produção de argumentos e justificações; e 4) diferentes tipos de tarefas conduzem a diferentes oportunidades para *raciocinar e justificar*, o que deriva sobretudo de duas características da afirmação a analisar — se é verdadeira ou falsa e se diz respeito a um conjunto finito ou infinito de casos. Assim, os futuros professores devem saber analisar as diferentes oportunidades que cada uma apresenta para o raciocínio, de modo a contemplar as várias tarefas equilibradamente nas suas práticas futuras.

As ideias de Stylianides e Stylianides (2006) têm subjacente não só o desenvolvimento da capacidade de raciocinar, mas também do conhecimento sobre o raciocínio. Estas ideias são coerentes com a proposta de Loureiro (2004) de que o próprio raciocínio matemático seja objeto de estudo dos professores e que é importante dedicar tempo a aspetos característicos do pensamento matemático, como a natureza das conjeturas, a linguagem das generalizações ou diferentes tipos de raciocínio e de demonstração.

A geometria na formação inicial de professores. Para o NCTM (1994), os professores dos anos iniciais devem aproveitar as ideias intuitivas que as crianças têm sobre dimensão e forma e partir dessa base informal para desenvolver o conhecimento dos alunos. Para isso devem compreender a forma como a geometria é usada para descrever o mundo em que vivemos e resolver problemas concretos, devem saber analisar figuras bi e tridimensionais incluindo o estudo de pavimentações, simetria, famílias de polígonos e poliedros. Devem ainda a conhecer a geometria nas suas várias perspetivas, produzir argumentações e justificações e privilegiar a visualização espacial.

Numa abordagem específica à formação de futuros professores em geometria, Niss (1998) considera que esta deve proporcionar um conhecimento desta área nas suas diferentes vertentes: a geometria como um conjunto de teorias, um conjunto de propriedades do mundo físico, um ramo da matemática com ligações a praticamente todos os outros ramos e uma componente constitutiva da *visão humana* e da *visualização* (itálicos do autor). Embora no caso dos futuros professores dos primeiros anos se enfatize a vertente que relaciona a geometria com o mundo físico, estes devem saber que a geometria não é apenas uma coleção de factos e objetos desconectados, que, pelo contrário, podem ser organizados de várias formas numa estrutura regida pelo raciocínio dedutivo.

Em 2000, o Conference Board for the Mathematical Sciences (CBMS) elaborou um documento orientador para a formação de professores de matemática onde propôs que, no que se refere à geometria, todos os futuros professores que lecionam até ao 5.º ano desenvolvam as suas competências nas seguintes áreas:

> - Capacidades de visualização: familiarizar-se com projeções, secções, decomposições de figuras comuns bi e tridimensionais; representar objetos tridimensionais em duas dimensões e construir objetos tridimensionais a partir de representações bidimensionais.
>
> - Figuras elementares, suas propriedades e relações entre si: desenvolver a compreensão sobre ângulos, transformações (reflexões, rotações e translações), congruência e semelhança.
>
> - Comunicar ideias geométricas: aprender vocabulário técnico e compreender o papel da definição matemática. (p. 21)

O relatório seguinte do CBMS (2012) atualiza as ideias principais sobre a formação dos professores em geometria, alinhando-as com o documento *Common Core*

State Standards, e reduzindo fortemente a geometria na preparação de professores daqueles anos. Os tópicos passam a ser os seguintes:

> - Compreender os conceitos geométricos de ângulo, paralelismo e perpendicularidade e usá-los para descrever e definir figuras; descrever e raciocinar sobre localizações espaciais (incluindo o plano coordenado).
> - Classificar figuras em categorias e raciocinar e explicar relações entre essas categorias.
> - Raciocinar sobre relações proporcionais em ampliações e reduções de figuras. (p. 30)

Apesar dos pontos em comum, as alterações ao nível dos assuntos (por exemplo, com o desaparecimento das transformações geométricas), bem como a ausência de referências à visualização e representação constitui uma mudança que confirma a falta de consenso sobre o conhecimento geométrico que os futuros professores devem desenvolver (Jones, Mooney, & Harries, 2000). Esta desvalorização é particularmente problemática se considerarmos, tal como sugerem Clements e Sarama (2011), que a geometria e, em particular, o raciocínio espacial é uma capacidade que intervém transversalmente em várias áreas da matemática e de outras ciências. A este propósito recordam Einstein e Hawking, para quem o raciocínio espacial constituía frequentemente uma primeira abordagem aos problemas. Além disso, consideram que o conhecimento geométrico está fortemente relacionado com o raciocínio matemático e constitui uma porta de entrada para a compreensão de outros conceitos e desenvolvimento de capacidades.

No contexto português, o documento produzido por Albuquerque et al. (2005) sugere que, em geometria e até ao 2.º ciclo, a formação dos professores inclua uma perspetiva histórica do tema, um foco particular sobre a visualização e a representação espacial, o tratamento das formas geométricas básicas, suas propriedades e relações, transformações geométricas, particularmente isometrias e semelhanças, dando igualmente atenção à comunicação. Para os autores, esta formação deverá desenvolver-se em torno de atividades próprias da matemática, como a formulação e resolução de problemas, e incluir processos a ela associados: formulação de conjeturas, teste e validação, argumentação, prova e refutação, sem ignorar o recurso à tecnologia ou outras ferramentas e materiais.

O estudo de Menezes et al. (2014) revela que as orientações de Albuquerque et al. (2005) são coerentes com o ensino praticado em algumas instituições de formação, mas ainda assim com resultados que revelam aspetos críticos na aprendizagem da geometria por parte dos futuros professores. No estudo quantitativo realizado por aqueles autores em três Escolas Superiores de Educação públicas verifica-se que, de modo geral, o conhecimento de tópicos elementares de geometria dos futuros professores que frequentam a Licenciatura em Educação Básica nas três ESE tem lacunas acentuadas, observando-se alguma melhoria de resultados na sequência da formação matemática realizada, embora diferenciada consoante o tipo de conhecimento. Por exemplo, na questão sobre raciocínio espacial, relativa à planificação do cubo, a grande maioria dos formandos (90%) identifica corretamente uma planificação prototípica, mas ignora outros casos possíveis, o que não muda significativamente com a formação. Já no que respeita à classificação de figuras, apenas 37% identificam o quadrado como um retângulo, o que sobe para 60% depois da formação. Nesta categoria, a formação realizada parece ter contribuído de forma substancial para a melhoria de resultados dos futuros professores, embora se registem erros persistentes. No que respeita a conceitos como a congruência ou a equivalência de figuras, os futuros professores obtêm bons resultados, mas revelam inconsistência sobre a semelhança. Quanto às propriedades de figuras 2D, muitos futuros professores conhecem propriedades como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo, mas revelam um grande desconhecimento relativamente a outras, como as propriedades das diagonais de polígonos. Por exemplo, apenas 37% reconhecem nos dois momentos que um triângulo não tem diagonais, o mesmo valor para a congruência das diagonais de um retângulo (que sobe para 50% depois da formação) e menos de metade reconhece que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

A análise global dos resultados obtidos no estudo anterior, embora com indicadores positivos, revela insuficiência no conhecimento dos futuros professores quando tratamos de alguns casos sensíveis, como é percetível na quantidade de futuros professores que persistem em considerar semelhantes quaisquer dois triângulos retângulos (cerca de 30%). Estas dificuldades vêm na linha do apontado em outros estudos realizados com professores e futuros professores que ensinam matemática (Tempera, 2010; Viseu, Menezes, & Almeida, 2013). Contudo, alguns investigadores têm afirmado a existência diminuta de investigação sobre o conhecimento dos professores e futuros professores no âmbito da geometria (Chapman, 2013; Clements & Sarama, 2011;

Steele, 2013). Ainda assim, os estudos analisados confirmam de certa forma a ideia de que existem lacunas sérias no conhecimento geométrico dos futuros professores e na sua capacidade de raciocinar em contextos geométricos, o que torna oportuna a afirmação de Clements e Sarama: "Uma formação tão limitada, desde a sua própria infância adiante, deixa os professores mal preparados para ensinarem geometria" (2011, p. 136).

3 Metodologia de investigação

Neste capítulo apresento as principais opções metodológicas, com destaque para a adequação da investigação baseada em design e as características dos ciclos de investigação. Explico a forma como encarei a dupla condição de professora e investigadora e a forma como abordei as questões éticas emergentes. Finalmente, apresento a unidade curricular em que decorreu a experiência de formação, os seus princípios de design e a conjetura de formação.

Investigação baseada em design

Justificação da opção metodológica. Como foi referido no capítulo introdutório, este estudo foi espoletado por uma necessidade pragmática, emergente da minha prática: alterar o currículo de uma unidade curricular sobre geometria para futuros professores de modo a melhorar a sua formação naquela área. No entanto, a intenção nunca foi a de chegar a um currículo "pronto a usar", a partir de um processo de construção e teste de materiais de formação, mas sim avançar na compreensão sobre a forma como os futuros professores desenvolvem o seu raciocínio geométrico a partir do currículo reformulado. Desta forma, considerei que estavam presentes as principais características da investigação baseada em design (IBD), uma metodologia de investigação focada na aprendizagem em contexto, a partir da conceção de estratégias e ferramentas de ensino e que visa o desenvolvimento ou refinamento de teorias (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003; Design-Based Research Collective, 2003). Mais especificamente, Cobb, Jackson e Dunlap (2016) indicam cinco aspetos característicos de uma IBD e que se aplicam ao presente estudo: i) abordam problemas da prática dos professores e formadores, nomeadamente a necessidade de promover a aprendizagem; ii) têm uma natureza intervencionista; iii) têm uma orientação pragmática e teórica; iv) implicam testar e, se necessário, rever ou abandonar conjeturas sobre os processos de aprendizagem e os meios para a apoiar; e v) visam a generalidade.

As experiências realizadas segundo este tipo de investigação, designadas originalmente por Brown (1992) como *design experiments*, permitem estudar a complexidade que caracteriza os ambientes educativos onde estão envolvidos múltiplos elementos de diferente natureza. Segundo a autora, para a definição desses ambientes contribuem aspetos como o currículo e o sistema de formação dos professores (nível macro). No entanto, como indicam Cobb et al. (2003), são também relevantes elementos como as tarefas propostas aos alunos, o tipo de discurso encorajado, as normas de participação estabelecidas e os instrumentos e meios materiais disponíveis (nível micro). Mais do que o somatório de todos estes elementos, estes autores olham para os contextos tendo em conta a forma como eles interagem entre si. O contexto não é valorizado apenas pela necessidade de um conhecimento mais completo sobre a experiência realizada, mas também porque pode contribuir com o aprofundamento das teorias sobre o ensino e a aprendizagem. Assim, o desenvolvimento de uma teoria através de um *design experiment* procura explicar o porquê de uma experiência resultar, mas sugere também como ela se pode adaptar a novas circunstâncias (Cobb et al., 2003; Design-Based Research Collective, 2003). Estas teorias são adjetivadas como "humildes" no sentido em que incidem em processos de aprendizagem específicos de algum domínio e procuram explicitar padrões de raciocínio, bem como os meios que promovem tais padrões.

Prediger, Gravemeijer e Confrey (2015) consideram que as numerosas investigações realizadas nos últimos anos seguindo esta metodologia procuram gerar teoria e produtos, mas divergem no que respeita ao seu foco, dividindo-se essencialmente em dois grandes grupos consoante aquilo que se propõem produzir e o papel que podem desempenhar: (i) num grupo, produtos curriculares e princípios de design prontos a ser usados pelos profissionais; (ii) noutro grupo, teorias locais que se destinam a informar investigadores e professores. Neste último caso, os materiais produzidos (recursos, tarefas e sua sequenciação) procuram estimular o pensamento e o investigador analisa até onde é que os estudantes "podem chegar" com tais materiais. Trata-se, no entanto, de uma distinção problemática na medida em que, como refere Plomp (2010), os princípios são já, em si mesmos, um contributo para a teoria ainda que sejam designados de outras formas consoante os autores (por exemplo, teoria de design, teorias específicas, teoria local de aprendizagem, teoria da intervenção…).

Prediger et al. (2015) defendem a necessidade da investigação se aproximar da segunda perspetiva, contrariando a ideia de que um professor poderá ser bem-sucedido apenas pela utilização de materiais curriculares e a adoção de princípios que se mostraram eficazes noutras situações. Valorizam assim a dimensão ecológica da sala de aula, segundo a qual não é possível isolar ou controlar todas as variáveis que interagem entre si, e que mostra que o professor precisa de adaptar-se continuamente a formas de agir e pensar dos seus alunos, em vez de simplesmente usar materiais prescritos. Consequentemente, a investigação deve ajudar os professores a interpretar a forma como os seus alunos pensam e agem, antecipar processos de aprendizagem e os meios potenciais para a apoiar. Para Prediger et al. (2015), é preciso encarar o "design e criação de ambientes de aprendizagem como um meio para chegar à compreensão de processos de aprendizagem inovadores e as formas pelas quais podem ser apoiados" (p. 884), uma perspetiva que é seguida neste estudo.

Ciclos de IBD. Apesar de perseguirem o desenvolvimento de teorias, as IBD não partem de um vazio teórico, antes recorrem a investigação anterior e procuram incorporar os seus resultados teóricos e empíricos. Assim, por um lado, as IBD são realizadas a partir de uma conjetura de aprendizagem e os meios necessários para a verificar mas, por outro lado, constituem também contextos para testar a conjetura inicial e formular e testar novas conjeturas mais específicas, em ciclos sucessivos de criação e revisão, com vista a resolver os problemas identificados (Cobb et al., 2003; Collins, Joseph, & Bielaczyc, 2004).

No que diz respeito à recolha de dados, para Prediger et al. (2015), o desenvolvimento de uma teoria local implica que o investigador recolha dados que vão além dos *inputs* e *outputs*. O planeamento, execução e análise retrospetiva dos dados obriga-o a um compromisso exigente com a metodologia de modo a obter vários dados. Concretamente, precisa de

> observar aulas, ouvir alunos e professor e recolher cuidadosamente o uso da linguagem, registos e explicações e, recolher uma quantidade substancial de exemplos de trabalhos dos alunos e, o mais fundamental, ser profundamente curioso sobre o que acontece no contexto de aprendizagem das ideias matemáticas. (p. 882)

Nesta investigação foram realizados dois ciclos de investigação, correspondendo o primeiro a um estudo piloto orientado para os seguintes objetivos: (i) diagnosticar de forma mais completa as necessidades dos futuros professores no que respeita ao seu conhecimento e raciocínio em geometria; (ii) testar a natureza exploratória das tarefas e as suas potencialidades para o desenvolvimento do raciocínio geométrico; (iii) estabelecer uma ligação entre conhecimento matemático e didático através dessas mesmas tarefas; (iii) reconhecer as necessidades relativas aos dados a recolher e a adequação dos instrumentos a utilizar; e (iv) ensaiar uma primeira análise de dados.

Dos resultados do primeiro ciclo, apresento de seguida os aspetos que mereceram uma reformulação ou maior atenção no segundo ciclo. Em primeiro lugar, do ponto de vista do raciocínio, iniciou-se a análise dos processos investigar invariantes e generalizar, classificar, definir e justificar. Todos os processos se mostraram muito relevantes no que respeita ao contributo para o raciocínio geométrico e, particularmente, com potencialidades em termos do desenvolvimento do raciocínio espacial que não tinham sido previstas. No entanto, os participantes também revelaram algumas dificuldades em cada um dos processos que merecem especial atenção, com destaque para a influência das imagens prototípicas no processo de investigar invariantes, generalizar e classificar, bem como a dificuldade acrescida em construir justificações para generalizações. Em segundo lugar, a articulação entre conhecimento matemático e didático mostrou ser promissora, quer pelas discussões em sala de aula em torno das ideias e processos matemáticos alvo de aprendizagem, quer pelo exercício de reflexão sobre as suas aprendizagens proposto no portefólio, quer ainda pela análise de episódios de sala de aula incluídos nas tarefas. Contudo, este último aspeto mostrou ser bastante sensível pois, se há situações didáticas pelas quais os futuros professores se mostram interessados e capazes de analisar, outras mostram-se muito difíceis, pelo que é necessário compreender quais são as ideias didáticas centrais e adequadas para trabalhar nesta fase da formação inicial. Finalmente, como já tinha sido antecipado, o estudo requer uma recolha de dados de natureza diversificada e recorrendo a vários instrumentos. O primeiro ciclo revelou ainda que a análise do raciocínio espacial está muito dependente da interação entre formandos e professora, de modo a explicitar verbal ou gestualmente os raciocínios que, de outro modo, se tornam inacessíveis. Esta dificuldade reforça a necessidade da recolha de dados áudio e vídeo que complementam outros registos.

Assim, a análise retrospetiva sobre o primeiro ciclo do estudo conduziu a refinamentos nas tarefas, quer na vertente matemática, quer na vertente didática, e à restrição de alguns aspetos que inicialmente tencionei investigar, dada a sua complexidade e a necessidade de foco. Já a análise do raciocínio espacial em vez das capacidades de visualização é uma opção que decorre de uma reconceptualização do raciocínio geométrico, em que os conceitos de estruturação espacial e geométrica assumiram especial importância. Para o segundo ciclo, não houve alteração sobre a conjetura de aprendizagem nem sobre os princípios de design. Na tabela 2 apresento as principais diferenças entre os dois ciclos.

Tabela 2

Comparação entre os dois ciclos de IBD

Ciclo	Participantes	Aspetos analisados	Recolha de dados
1.º ciclo	Duas turmas do 2.º ano da LEB	Investigar invariantes Generalizar Classificar Definir Justificar Capacidades de visualização Conhecimento didático	Teste diagnóstico Registos de resoluções de tarefas Portefólios Diário de bordo da investigadora
2.º ciclo	Uma turma do 2.º ano da LEB	Classificar Definir Justificar generalizações Raciocínio espacial	Teste diagnóstico Entrevistas iniciais Registos de resoluções de tarefas Registos áudio e vídeo das aulas Portefólios Diário de bordo da investigadora

Os dados apresentados neste estudo são todos relativos ao segundo ciclo da investigação. Foram considerados os 25[7] elementos da turma, com apenas um elemento do género masculino, todos a frequentar a unidade curricular pela primeira vez. À exceção de uma formanda com 36 anos, todas as formandas tinham idades entre os 19 e 23 anos e a esmagadora maioria candidatou-se à LEB como a sua primeira opção. Cerca de 2/3 da turma pretende tornar-se educadora de infância e as restantes dividem-se sobretudo pela docência nos 1.º ou 2.º ciclo, com preferência pelo primeiro caso (ver caracterização mais detalhada no anexo E).

De referir ainda que, inicialmente, previ que a recolha de dados incidisse sobre um grupo de quatro formandas, com perfis distintos. Contudo, já na fase de realização, compreendi que essa opção limitaria uma das potencialidades da IBD — captar "a ecologia de aprendizagem" (Cobb et al., 2003) — e diminuiria a riqueza e diversidade de resultados, pelo que decidi ter em conta os dados de toda a turma.

No que diz respeito à análise de dados, para o processo de definir (artigo 2) usei categorização das definições proposta por de Villiers et al. (2009) e para o processo de classificar (artigo 1) adaptei o quadro de análise de Fujita (2012). Para a análise do processo de justificar generalizações e para a análise dos processos de raciocínio espacial,

[7] Inicialmente a turma era constituída por 30 formandos. Contudo, uma das formandas desistiu, duas tinham uma assiduidade reduzida por serem trabalhadoras-estudantes e outras duas eram estudantes de Erasmus, pelo que cinco formandas não foram consideradas no estudo. Atendendo à existência de um único formando, neste estudo referir-me-ei maioritariamente ao grupo usando o género feminino.

construí quadros de análise próprios e que considero constituírem um contributo teórico deste estudo, seguindo a perspetiva de Prediger et al. (2015).

O papel de professora e investigadora. Para Cochran-Smith (2005), a tarefa de formar professores implica que os educadores trabalhem simultaneamente em vários projetos:

> O primeiro é ajudar os futuros professores a iniciar o processo continuado ao longo da vida de aprender a ensinar. O segundo é tomar o nosso próprio trabalho enquanto educadores como um alvo de investigação e aprender investigando sistematicamente a nossa própria prática e os quadros de análise de interpretação de forma crítica, rigorosa e com o objetivo de gerar conhecimento local e conhecimento que é útil a outras esferas públicas. (p. 220)

De facto, o papel de investigador e professor desenvolve uma atitude reflexiva que, naturalmente, contamina a sua prática, tal como aconteceu neste estudo. Numa reflexão sobre a sua experiência enquanto académica e formadora de professores, Cochran-Smith (2005) comenta que não existiram momentos distintos em que era apenas investigadora ou apenas professora e caracteriza a relação entre as duas funções como sendo reciproca, recursiva e simbiótica. Considera por isso que não se pode estabelecer uma divisão clara entre análise e ação, inquirição e experiência, teorização e prática de formação de professores.

Nos estudos caracterizados como IBD, tipicamente, uma equipa deve integrar professores que, idealmente, são também investigadores (Plomp, 2010). Esta orientação deriva de aspetos característicos das IBD. Em primeiro lugar, por natureza, as IBD estão ligadas à prática letiva o que implica o envolvimento dos professores; em segundo lugar, elas têm em conta toda a ecologia de aprendizagem, que inclui aspetos como a linguagem utilizada e as normas de participação estabelecidas (Cobb et al., 2003), pelo que é necessário contar com um profissional que domine estes aspetos; em terceiro lugar, o desenvolvimento da experiência de ensino implica familiaridade com a conjetura de ensino e a disponibilidade para a análise dos dados nas diferentes fases (Confrey & Lachance, 2000).

Desta forma, o duplo papel de professor e investigador pode ser importante para a investigação, mas esta condição é igualmente muito exigente. Um dos problemas que se pode colocar é, aliás, uma das críticas comuns à IBD e que é referida por Stemberger e Cencic (2014): como é que um investigador que está tão ligado à conceptualização, design, desenvolvimento e implementação de todo o processo de investigação consegue garantir a sua validade, fiabilidade e objetividade? Segundo os autores, esta não é uma questão fácil, mas existem respostas para minimizar as dificuldades, tais como as iterações sucessivas da experiência, o recurso a várias técnicas de recolha e a triangulação de dados. Também para Ponte (2002), estas dificuldades, já anteriormente apontadas a estudos de investigação sobre a prática, devem ser enfrentadas através do estabelecimento de padrões de qualidade adequados ao tipo de investigação. A este propósito, Cobb et al. (2015) consideram que a IBD necessita de "uma gramática argumentativa" que estabeleça a relação entre os dados e as conclusões do estudo e sugerem que os investigadores: i) demonstrem que os alunos não teriam desenvolvido as formas de raciocínio que estão documentadas se não tivessem participado no estudo; ii) ilustrem de que forma o sucesso de cada tipo de raciocínio emergiu da reorganização de modos de raciocínio prévios; e iii) identifiquem os aspetos específicos do ambiente de aprendizagem que foram determinantes na promoção de tais formas de raciocínio.

As sugestões anteriormente apresentadas foram, em grande medida, seguidas neste estudo. Por um lado, os dados apresentados foram recolhidos a partir de vários instrumentos e são de diferente tipo e natureza, incluindo registos escritos de resoluções de tarefas, registos áudio de discussões e registos vídeo de imagens que revelam gestos ilustrativos do raciocínio das participantes, bem como dados quantitativos que oferecem uma visão sobre o desempenho de toda a turma num determinado assunto. Por outro lado, os artigos apresentam elementos que estabelecem as relações entre os dados e as conclusões referidas por Cobb et al. (2015). Por exemplo, o artigo 1 documenta a forma como as formandas evoluíram ao longo da unidade no que respeita ao processo de classificar, partindo de um diagnóstico inicial e acompanhando os resultados obtidos em quatro tarefas, o que demonstra mais claramente como as formas de raciocínio a que chegaram são resultado da experiência realizada; o artigo 2 mostra como, no início do estudo, as formandas revelavam conceções erradas sobre as definições, muito embora tenham tido vários anos de trabalho em que este conceito esteve implícito, e a forma como reconstruiram este conceito através do envolvimento na atividade de definir, o que corresponde à segunda sugestão dos autores; finalmente, os artigos 3 e 4 incluem questões que abordam especificamente as características da abordagem, em particular das tarefas, que podem promover os raciocínios pretendidos.

Finalmente, o processo de revisão dos artigos por revistas científicas permitiu clarificar vários aspetos relativos à experiência de formação, à metodologia de investigação e à sustentação das conclusões, o que constitui uma garantia adicional da qualidade científica do estudo.

Questões éticas. Esta investigação cumpre os padrões de ética próprios de um trabalho académico sujeito a publicação, nomeadamente os princípios e orientações que constam da Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (2016) e da Carta de Ética da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação (2014) e, em particular, no que se diz respeito à relação das participantes com a investigação.

Desta forma, as participantes foram plenamente informadas e esclarecidas sobre todos os aspetos relativos à sua participação no estudo, dando o seu consentimento escrito para a utilização dos dados requeridos. Foi-lhes garantido o direito à privacidade, confidencialidade e anonimato, pelo que todos os nomes utilizados no estudo são pseudónimos e as imagens que constam nos artigos têm a face desfocada. A este respeito, merece nota a forma como tratei o único participante masculino, já que esta singularidade poderia reduzir a garantia de anonimato. Assim, os artigos 1, 2 e 3 referem-se apenas a participantes do género feminino, mesmo quando o formando interveio. Contudo, no artigo 4 a participação deste elemento foi muito importante e foi necessário incluir imagens que, mesmo sem revelar o rosto, podem denotar um perfil masculino. Assim, este artigo foi enviado a este participante que autorizou a sua publicação naquele formato.

Dada a condição dupla de professora e investigadora, um desafio a que me referi no ponto anterior, há um aspeto adicional relacionado com a dimensão ética. Trata-se do papel de avaliadora dos participantes, inerente à condição de professora, e que tem particular relevância pelo facto de um dos focos dessa avaliação coincidir com aspetos da aprendizagem que a experiência pretendeu promover, concretamente o raciocínio geométrico. Neste caso, considero que a independência e isenção do processo de avaliação dos estudantes só pode ser garantida por critérios claros e transparentes. Assim, foi dada a garantia às participantes de que as suas classificações teriam por base os dados recolhidos pelos instrumentos de avaliação que são apresentados na ficha de unidade curricular e comuns a todas as turmas (um teste e um portefólio), cujos resultados individuais seriam conhecidos dos formandos e sujeitos a eventual discussão e esclarecimento. Isto significa que toda a informação adicional recolhida através de observações, entrevistas ou registos áudio e vídeo foram considerados apenas para efeitos da investigação e avaliação formativa.

Experiência de formação

A unidade curricular de Geometria. A experiência de formação foi desenvolvida no âmbito da unidade curricular Geometria, inserida no 2.º ano da Licenciatura em Educação Básica. O segundo ciclo da investigação decorreu em 2014/15, contando a unidade com 54 horas de trabalho presencial em sala de aula, distribuídas ao longo de 15 semanas e por duas aulas por semana. Na tabela 3 encontram-se os objetivos e conteúdos que orientam globalmente o trabalho desenvolvido, tal como constam na Ficha de Unidade Curricular. No anexo F, apresento uma planificação geral da unidade curricular.

No que diz respeito aos instrumentos de avaliação, no início da unidade as formandas realizaram um teste diagnóstico e, no final, um teste sumativo, ambos individuais. Ao longo do semestre, construíram um portefólio a pares que constituiu um instrumento de avaliação formativa e sumativa. Este portefólio foi organizado em torno de seis tarefas, três realizadas dentro da sala de aula e três fora da sala de aula (a escolher de entre diversas propostas dos docentes), acompanhadas de uma reflexão sobre a sua resolução. Ao longo da sua construção, o portefólio teve dois momentos de avaliação formativa em que os docentes que lecionaram a unidade deram *feedback* aos futuros professores sobre a correção matemática das tarefas e a adequação das reflexões.

Princípios de design da experiência de formação. Uma parte significativa da experiência de formação diz respeito ao conjunto de tarefas propostas na unidade curricular, ao qual se associa uma metodologia de trabalho. De seguida, enuncio os princípios que foram seguidos na preparação desta experiência e que se dividem em: a) princípios transversais sobre a metodologia e o conteúdo (que abrangem quase todas as tarefas da unidade curricular, princípios 1 a 4); b) princípios para as tarefas que promovem o raciocínio (princípios 5 a 7); e c) princípio para a sequência sobre a aprendizagem das figuras geométricas e formalização de conceitos (princípio 8).

Tabela 3

Objetivos de aprendizagem e conteúdos programáticos da unidade curricular

Objetivos de Aprendizagem
Consolidar e ampliar os conhecimentos de geometria relativos aos temas indicados neste programa. Desenvolver a compreensão da geometria e da sua natureza no que se refere à definição, demonstração e formalização. Desenvolver a capacidade de resolução de problemas.

Desenvolver capacidades de visualização e de representação. Desenvolver competências geométricas que contribuam para a valorização do ensino da geometria e das capacidades que lhe estão ligadas, na educação de infância e na escolaridade básica. Identificar as ideias fundamentais do ensino da geometria nos primeiros anos.
Conteúdos programáticos
Temas Transversais Visualização (Capacidades de visualização, Raciocínio visual) Representação (Notação, Suportes manuais à estruturação geométrica, Papéis para representação) Raciocínio Matemático (Lógica elementar, Classificação, Demonstração) Resolução de problemas. **Temas** *1. Figuras no plano [2D]* Decomposição e Composição de Figuras Estudo de figuras planas compostas e estabelecimento de propriedades Propriedades e Classificação de: Polígonos; Quadriláteros; Triângulos Estudo de relações numéricas em Polígonos Ângulos e relações entre ângulos Estudo de figuras congruentes, equivalentes ou semelhantes Aplicações da semelhança à resolução de problemas. *2. Figuras no espaço [3D]* Poliedros Classificação de Poliedros e Estudo de famílias de Poliedros Estudo de relações numéricas em Poliedros Estudo de relações entre famílias de Poliedros Planificações e outras representações no plano. *3. Transformações geométricas* Isometrias Reflexão, Rotação, Translação Reflexão Deslizante.

Fonte: Ficha da Unidade Curricular de Geometria, 2014/15, ESELx

Princípio 1. Na formação inicial, os futuros professores devem aprender segundo os mesmos métodos que se preconiza que venham a utilizar nas suas práticas (Albuquerque et al., 2005; Ponte & Chapman, 2008; Serrazina, 2005). Nesta experiência, esta ideia é interpretada e concretizada valorizando o ensino exploratório (Ponte, 2005), caracterizado pela realização de tipos de tarefas diversificados, com ênfase particular nos problemas, investigações e explorações. A estas tarefas associa-se uma dinâmica de aula em que se privilegia o trabalho colaborativo, a comunicação e negociação de resultados, que se concretiza em aulas geralmente organizadas em quatro momentos: apresentação da tarefa, resolução em pequeno grupo, discussão coletiva e sistematização de ideias. Este tipo de tarefas e a dinâmica gerada são também coerentes com as propostas de Cuoco

(2001) de que a formação inicial deve promover as interações entre formandos e formador, dar ênfase a hábitos de pensamento próprios dos matemáticos e, consequentemente, apresentar a matemática como algo que nós fazemos e não que memorizamos. Este princípio torna assim explícito a forma como encaro a aprendizagem da matemática e posiciona a investigação num quadro teórico mais abrangente, tal como sugerem Cobb et al. (2015). Adicionalmente, esta perspetiva é coerente com uma orientação construtivista da aprendizagem, própria das investigações que se focam nos processos de aprendizagem (Gravemeijer, 2016).

Princípio 2. A formação inicial deve permitir que os futuros professores compreendam e reconstruam aquilo que sabem com maior profundidade e significado (Ponte & Chapman, 2008) e estabelecer relações com a matemática que se vai ensinar, tratando-a do ponto de vista superior (Albuquerque et al., 2005).

Como podemos observar na Tabela 3, os conteúdos previstos têm uma ligação com os abordados desde o pré-escolar até ao 2.º ciclo, o que merece duas observações: por um lado, muitos dos conteúdos já foram tratados durante a escolarização das formandas mas, como vimos no capítulo 2, a literatura aponta para um conhecimento matemático deficiente e para a existência de mal-entendidos comuns, pelo que a ideia de *reconstruir* apontada por Ponte e Chapman (2008) constitui um princípio importante nesta experiência; por outro lado, não é imediato compreender como é que alguns conteúdos fundamentam as aprendizagens matemáticas para idades mais precoces, como na educação pré-escolar. Contudo, tomemos como exemplo a classificação de quadriláteros. Como sugerem Clements e Sarama (2011), se um educador pede a uma criança para participar numa "caça às formas" e pede retângulos, ao rejeitar a escolha de uma criança que lhe traz um quadrado está a dificultar-lhe a aprendizagem de que um quadrado também é um retângulo, o que mostra como também a ação do educador tem de se apoiar num conhecimento mais profundo da matemática elementar.

Princípio 3. A experiência de formação deve contemplar, de forma equilibrada,

- tarefas que incidem em ideias matemáticas que são *fundamentais* e são *difíceis de aprender*, para as quais existem vários mal-entendidos (Stylianides & Stylianides, 2010)

- tarefas que fomentem a predisposição para fazer matemática e promovem a autoconfiança para aprender matemática de modo independente (Serrazina, 2005)

De certa forma, podemos encontrar alguma contradição nestas duas orientações, na medida em que, frequentemente, as ideias que são difíceis de aprender podem prejudicar a autoconfiança, sobretudo se a aprendizagem não for bem-sucedida. Na verdade, a experiência de formação procurou tomar estas ideias como princípios, procurando um equilíbrio entre si. Por exemplo, quer a construção da classificação de quadriláteros quer a construção de definições são ideias consideradas fundamentais, mas difíceis de aprender (artigos 1 e 2) e interferem com a autoestima das formandas que pensam dominar o conhecimento sobre figuras elementares. Desta forma, é igualmente necessário proporcionar tarefas poderosas, no sentido de promover o pensamento matemático, e que fomentem a confiança dos futuros professores nas suas capacidades. Uma das tarefas que ilustra este princípio é a investigação sobre poliedros truncados (artigo 4), uma tarefa em que as formandas se envolveram com muito empenho e sucesso, ainda que com diferentes níveis de concretização.

Princípio 4. As tarefas têm um objeto matemático principal e um foco didático que é secundário, mas significativo (Stylianides & Stylianides, 2010).

Este princípio de design visa a articulação entre conhecimento matemático e didático e esteve presente em várias tarefas, embora não tenha merecido um foco de análise nos artigos. Podemos identificá-lo, por exemplo, na tarefa de classificação de quadriláteros (artigo 1, versão completa apresentada no anexo H) e definição de quadriláteros (artigo 2, versão completa apresentada no anexo I). Nestas tarefas, apresento episódios de sala de aula que procuram ilustrar questões matemáticas e didáticas relevantes associadas a dificuldades comuns dos alunos (como o efeito protótipo) e como elas podem gerar dilemas aos professores. Estes episódios procuram também levar os futuros professores a questionar as consequências de práticas rotineiras (Watson & Mason, 2007), onde não é dada a oportunidade aos alunos de investigar as figuras geométricas.

Os princípios seguintes estão associados apenas a tarefas que incidem sobre o raciocínio e serão indicados exemplos ilustrativos que, de uma forma mais evidente, incorporam esse princípio:

Princípio 5. Promover o raciocínio espacial através da construção, manipulação e análise de diferentes representações, tirando partido de recursos físicos ou digitais, estáticos ou dinâmicos (tarefa de investigação das propriedades dos quadriláteros com recurso ao GeoGebra, artigo 1; tarefa de investigação sobre os sólidos poliedros truncados com recurso aos *polydrons,* artigo 4).

Princípio 6. Tirar proveito da ligação estreita entre a atividade de *raciocinar e justificar* e *atribuir sentido* (Stylianides & Stylianides, 2010) para promover uma aprendizagem com compreensão (tarefa de justificação da soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono, artigo 3).

Princípio 7. Promover um raciocínio flexível (Stylianides & Stylianides, 2010) que forneça ferramentas aos futuros professores para promover o raciocínio dos seus alunos, o que implica conhecer diferentes definições para o mesmo conceito e diferentes formas de justificar (tarefa sobre definições de quadriláteros, artigo 2).

O princípio seguinte procura cumprir a necessidade referida por Cobb et al. (2015) de tornar explícita a trajetória hipotética de aprendizagem que é antecipada pelo investigador, bem como os meios que a apoiam e os princípios que a informam:

Princípio 8. A aprendizagem das figuras geométricas e a formalização dos conceitos é potenciada pela sequência *investigar propriedades das figuras, classificar* e *definir,* em que cada etapa é trabalhada a partir de tarefas que mobilizem o raciocínio geométrico (tarefas "Propriedades dos quadriláteros", "Classificação de quadriláteros e triângulos" e "Definir quadriláteros", anexos G, H, I, respetivamente).

Este princípio diz respeito a uma trajetória hipotética de aprendizagem que foi concebida para o estudo dos quadriláteros e dos prismas. Para Clements e Sarama (2004), uma trajetória hipotética de aprendizagem compreende três aspetos: um objetivo de aprendizagem, uma perspetiva teórica (ou modelo) sobre a progressão no pensamento e aprendizagem num determinado domínio e uma sequência de tarefas. A trajetória baseia-se num modelo de aprendizagem que é suficientemente explícito para descrever os processos envolvidos na persecução dos objetivos a atingir e concretiza-se através de uma sequência de tarefas que pretende desencadear a atividade matemática que, desejavelmente, conduzirá à progressão dos alunos. Os investigadores que concebem a sequência assumem que esta constitui um programa particularmente eficaz, mas não sugerem que é a única, ou mesmo a melhor, para atingir os objetivos definidos, até porque o currículo é determinado por vários outros fatores, como os conhecimentos que os alunos já possuem, as suas preferências e envolvimento em determinadas tarefas ou contextos. Este é um dos motivos pelos quais uma trajetória é sempre hipotética, na medida em que, *a priori*, o professor e/ou investigador não pode conhecer completamente a dinâmica que será desencadeada e, consequentemente, como se processará o ensino e a aprendizagem.

Para a construção destas trajetórias, os investigadores recorrem à investigação já existente e que pode informar as suas três componentes — os objetivos, o modelo de aprendizagem e a construção das tarefas. No caso da aprendizagem das figuras geométricas, a investigação em educação matemática tem mostrado evidência que nos leva a questionar a adequação de uma abordagem que parte das definições para a organização das figuras em classes. Vários estudos sobre a aprendizagem dos quadriláteros, envolvendo alunos, professores e futuros professores, mostram que frequentemente os indivíduos conhecem as definições, mas não raciocinam de acordo com tais definições (por exemplo, Fujita, 2012). Este problema deve-se, em parte, ao efeito protótipo que leva os indivíduos a restringirem os conceitos de modo a corresponderem apenas a casos particulares. Como mostra Hershkowitz (1989), este efeito pode ser reforçado pelas experiências anteriores, mas é também consequência da forma como analisamos as figuras e que não é puramente analítica pela interferência da perceção sobre a representação visual.

Desta forma, os resultados da investigação e a relação estreita entre as definições e as classificações (De Villiers, 1994) levou-me a conceber uma sequência de tarefas que parte da investigação das propriedades das figuras, de modo a facilitar a identificação daquelas que são comuns a um conjunto e que determinam a classe, promovendo assim a sua classificação. A construção das definições é a última etapa da sequência pois parte igualmente dos atributos comuns, mas é um processo ainda mais exigente por implicar a explicitação de um conjunto de atributos que seja necessário, suficiente e, tendencialmente, mínimo.

Conjetura de formação. A consideração dos oito princípios que foram enunciados no ponto anterior resulta na seguinte conjetura de formação:

> O envolvimento dos futuros professores nos processos de classificar e definir figuras geométricas, bem como generalizar e justificar generalizações sobre figuras geométricas, através de uma abordagem exploratória que inclui tarefas de natureza e níveis de desafio diferentes, promove o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

4 Artigos

Neste capítulo, apresento uma descrição dos quatro artigos publicados com uma atenção particular às questões analisadas em cada um, os principais elementos do quadro conceptual e os resultados que se destacam. Explicito ainda a relação dos artigos com o objetivo e as questões do estudo e especifico os contributos dos artigos para as respostas às três questões formuladas no estudo.

Descrição dos artigos

From the classification of quadrilaterals to the classification of prisms: An experiment with prospective teachers. Este artigo tem como objetivo responder à seguinte questão: de que forma a aprendizagem da classificação hierárquica de figuras geométricas evolui com a realização de uma experiência de formação de natureza exploratória e que inclui a classificação de quadriláteros e prismas?

No que respeita ao quadro conceptual, salienta-se o significado assumido para o processo de classificar e que consiste em declarar uma equivalência entre objetos diferentes, mas com características comuns, com vista a uma generalização. Este processo implica identificar tais características, as quais vão determinar a categoria, e encarar cada objeto como um caso particular da classe. As classificações hierárquicas aplicam-se quando conceitos mais particulares formam subconjuntos de conceitos mais gerais. Relativamente à experiência de formação, a abordagem exploratória segue a perspetiva de que os futuros professores se devem envolver em tarefas que promovam o seu raciocínio, a comunicação, a compreensão sobre conceitos e procedimentos, bem como a reflexão sobre a experiência de fazer matemática, individual e coletivamente, usando os mesmos métodos que deverão implementar futuramente na condição de professores.

A análise de dados estabelece níveis de compreensão que as respostas das formandas revelam sobre as classificações das figuras: nível *classificação hierárquica*, se o seu juízo sobre as figuras é analítico (usam os atributos críticos das figuras) e identificam corretamente as relações entre as figuras; nível *classificação parcialmente prototípica*, se identificam apenas algumas relações, o que corresponde a um juízo baseado em atributos críticos e não críticos das figuras; nível *classificação prototípica*, se não identificam relações entre as figuras, o que corresponde a um juízo baseado em atributos não críticos ou na imagem prototípica das figuras. Os dados foram recolhidos a partir de um teste diagnóstico, uma tarefa de investigação sobre as propriedades dos quadriláteros (com recurso ao GeoGebra), uma tarefa de classificação de quadriláteros, outra sobre a classificação de prismas e o teste final da disciplina.

Os resultados mostram que, no início da experiência, as formandas tinham um conhecimento limitado sobre as propriedades dos quadriláteros e ignoravam as relações hierárquicas, à exceção da relação entre o quadrado e o retângulo que era conhecida de algumas. A investigação sobre as suas propriedades alargou este conhecimento através da observação de exemplos não prototípicos, da análise dos atributos críticos e a consideração de algumas figuras como casos particulares de outras, o que requereu um apoio significativo da professora e um desafio constante às conceções prévias das formandas. A tarefa sobre a classificação de quadriláteros evidenciou uma evolução, pois as respostas foram consistentes com o nível de *classificação hierárquica* para os retângulos e paralelogramos, mas apenas metade se situou neste nível para os papagaios. Este problema pareceu estar ligado à forte conceptualização de alguns quadriláteros que conduz à realização de juízos com base em atributos não críticos ou imagens prototípicas e à inexperiência com o processo de classificar. A classificação de prismas evidenciou uma evolução significativa, com respostas consistentes com o nível *classificação hierárquica*. Porém, a tarefa do teste final sobre quadriláteros evidenciou ainda alguns erros, sobretudo relacionados com a interpretação do discurso e raciocínio lógico.

Este percurso leva a considerar os seguintes aspetos que influenciam a aprendizagem da classificação de figuras: a natureza da análise que os indivíduos fazem das figuras (analítica ou prototípica) é influenciada pela figura em questão, em particular pela sua conceptualização prévia; é fundamental desenvolver atividades que promovam o conhecimento das propriedades das figuras, que alarguem as representações de cada classe incluindo exemplos não prototípicos, que conduzam à análise de invariantes e que deem relevo à verbalização do raciocínio, à negociação de significados e ao debate de ideias. É preciso ainda ter em conta que o próprio processo de classificar requer uma aprendizagem que vai além dos objetos em que incide e não deve ser "imposto" pelo professor, mas emergir do envolvimento efetivo em atividades de natureza exploratória.

Definir figuras geométricas: Uma experiência de formação com futuras professoras e educadoras. Este artigo tem como objetivo identificar o conhecimento que as futuras professores revelam sobre a definição de figuras e de que modo este processo se relaciona com a estruturação das figuras. Deste modo, formulam-se as seguintes questões: Quais os requisitos sobre a definição de figuras geométricas a que os futuros professores atendem quando selecionam e constroem definições? Como se relaciona a estruturação espacial e geométrica das figuras com o processo de definir?

Neste estudo, assume-se que, no contexto de trabalho sobre figuras geométricas, uma definição corresponde a uma condição, frequentemente obtida por conjunções de condições, a que a figura definida deve satisfazer para que possa ser nomeada dessa forma. Deve conter um conjunto necessário e suficiente de condições e constituir, tendencialmente, um conjunto o mínimo possível (definição económica). Dado que as condições dizem respeito a propriedades das figuras, é convocado o conceito de estruturação espacial — ato mental de organizar um objeto ou um conjunto de objetos através da identificação das suas componentes e do estabelecimento de relações entre elas — e estruturação geométrica, que descreve a estruturação espacial em termos de conceitos geométricos.

Este artigo apresenta dados de três tarefas: uma tarefa de diagnóstico que inclui uma questão sobre definições para quadrado; uma tarefa de construção de definições para retângulo e papagaio; e uma tarefa de construção da definição de paralelepípedo. Para a análise dos dados, classificaram-se as definições propostas pelas formandas em económicas, corretas (mas não económicas) e incorretas (caso a condição não seja necessária e/ou suficiente e/ou inclusiva). Sobre a estruturação que estas revelam, procura-se identificar a complexidade das relações geométricas em que se baseiam e o domínio dos conceitos envolvidos.

No que respeita aos requisitos a que uma definição deve obedecer, no início da unidade, as participantes consideravam uma definição como válida sempre que a condição fosse necessária, sem ter em conta que esta deveria ser também suficiente. Além disso, não conheciam o conceito de definição inclusiva nem de definição económica, muito embora reconhecessem que uma definição de uma figura não apresenta necessariamente todas as suas propriedades. No âmbito do estudo dos quadriláteros, as formandas começaram a ter em conta a suficiência da condição, mas as definições inclusivas constituíram um desafio significativo, em parte por considerarem que conduzem a ambiguidade — um aspeto que foi sendo atenuado. Contudo, a aprendizagem relativa às definições económicas revelou-se mais problemática, pois muitas formandas persistiram em não produzir definições com este requisito.

No que diz respeito à relação entre a estruturação espacial e geométrica das figuras com o processo de definir, pode-se afirmar que existe uma influência mútua. Por um lado, a construção de definições económicas é influenciada pela necessidade de contemplar na definição as propriedades mais estruturantes das figuras (por exemplo, a consideração da congruência dos lados opostos no retângulo que é supérflua se considerarmos a congruência dos ângulos). Além disso, o sucesso na construção de definições depende igualmente da figura a definir, já que o mesmo indivíduo pode apresentar definições corretas para uma figura, mas não para outra. Por outro lado, a atividade de definir, além ser influenciada, é também promotora da estruturação espacial e geométrica, já que a procura de um conjunto (mínimo) de propriedades leva a uma análise mais profunda das figuras e das relações entre os seus elementos. Mais do que chegar a definições corretas, este é um aspeto a sublinhar como contributo da experiência de formação para o conhecimento das propriedades das figuras e o desenvolvimento do raciocínio.

Justificando generalizações geométricas na formação inicial de professores. O artigo tem como objetivo compreender a forma como as futuras professoras justificam generalizações sobre famílias de figuras geométricas, analisando as seguintes questões: Que tipo de argumentos usam para justificar generalizações sobre famílias de figuras geométricas? Que dificuldades manifestam? Que atividades promovem o saber justificar e compreender a natureza da justificação?

No que respeita ao quadro conceptual, assume-se que justificar significa construir uma sequência lógica de afirmações, cada uma apoiando-se em conhecimento já estabelecido, de forma a chegar a uma conclusão. A justificação deve conter linguagem geral que demonstre que se aplica a mais do que um caso particular, usar afirmações e formas de raciocínio e expressão válidas e aceites na comunidade da sala de aula e deve ter como propósito compreender o motivo pelo qual uma afirmação é verdadeira.

Para a análise dos dados, construiu-se um modelo sobre a justificação de generalizações em geometria articulando as ideias sobre o processo de justificar e a especificidade dos objetos geométricos. Para isso, convocam-se os conceitos de estruturação espacial — ato mental de organizar um objeto ou um conjunto de objetos através da identificação das suas componentes e do estabelecimento de relações entre elas — e estruturação geométrica, que descreve a estruturação espacial em termos de conceitos geométricos. Assim, o modelo de análise estabelece níveis de justificação tendo em conta a natureza dos argumentos, a explicitação das propriedades geométricas e o grau de generalização da linguagem utilizada. Os dados foram recolhidos a partir de duas tarefas de justificação, a primeira sobre a expressão da soma dos ângulos internos de um polígono de *n* lados e realizada em pequenos grupos e a segunda, sobre as relações numéricas entre elementos de uma família infinita de poliedros, realizada individualmente no teste final de avaliação.

Os resultados mostram que, relativamente aos argumentos usados, a perspetiva de justificar para compreender o porquê da validade de uma afirmação pareceu bem integrada pelas participantes que, na maioria dos casos, se basearam em propriedades relevantes e já estabelecidas, envolvendo uma correta estruturação geométrica, que resultaram em justificações válidas ou contendo argumentos válidos e pertinentes, mesmo que incompletas. No que respeita às dificuldades, identificaram-se os seguintes fatores: a natureza da afirmação a justificar que se apoia numa representação genérica (referente a uma família de figuras em vez de uma figura única) onde não surgem quaisquer valores; os princípios de uma justificação, nomeadamente a necessidade de explicitar adequadamente os argumentos, usando uma linguagem geral que se aplica a mais do que um caso particular; alguma tendência para argumentar com base em regularidades numéricas, ou seja, sem recurso à estruturação geométrica, nos casos em que a generalização está associada a uma sequência simples (por exemplo, múltiplos). Contudo, estas dificuldades manifestaram-se de maneira diferente nas duas tarefas, assinalando-se uma progressão no que respeita à linguagem usada que não se centrou tanto em casos particulares.

No que respeita às atividades que promovem o saber justificar e compreender a natureza da justificação, a comparação dos desempenhos nas duas tarefas leva a considerar as diferenças entre a sua formulação e o contexto em que foram resolvidas. Por um lado, o facto de o enunciado sugerir a justificação recorrendo a raciocínios diferentes, parece apoiar a utilização de argumentos com base na estruturação geométrica. Por outro lado, a representação no enunciado de vários elementos da família de figuras, pode promover uma linguagem mais geral, em vez de se focar em casos particulares. Finalmente, a valorização da partilha e discussão de ideias, conduz a um questionamento que favorece a compreensão do porquê de a afirmação ser válida.

Desenvolvendo o raciocínio espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos. Este artigo visa compreender de que forma as tarefas podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio espacial e quais os processos de raciocínio envolvidos durante a sua resolução. Assim, formulam-se as seguintes questões: Quais os processos de raciocínio espacial em que os formandos se envolvem quando resolvem tarefas de contagem e estabelecimento de relações em classes de poliedros? De que forma estas tarefas, realizadas num contexto de ensino exploratório, podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio espacial?

Neste artigo, assume-se que o raciocínio espacial é um tipo de raciocínio mobilizado para responder a questões e envolve dois tipos de processos: a) a *construção mental de imagens e modelos sobre objetos espaciais e relações* e b) a *análise e realização de transformações e operações entre objetos e relações usando as imagens e modelos mentais*, ainda que se possam suportar em representações externas. Cada um destes processos é decomposto em subprocessos que foram usados para analisar mais detalhadamente os dados. Por um lado, a construção de modelos inclui: a *interpretação visual da informação*, a *identificação, coordenação e integração de subconjuntos do objeto*. Por outro lado, *a análise, transformação e operação com modelos mentais* inclui: a *observação e análise de imagens mentais*, a *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais* e a *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação.*

Os dados foram recolhidos com base numa tarefa em que, partindo dos sólidos platónicos, construídos com material manipulável, era pedido às futuras professoras que imaginassem como seriam os sólidos truncados, identificassem o número de faces, arestas e vértices (pelo que se apelida de tarefa de contagem) e estabelecessem relações entre o número de elementos do sólido platónico e o correspondente sólido truncado. A tarefa foi realizada num contexto de ensino exploratório, na medida em que a tarefa implica a mobilização significativa de raciocínio e comunicação e é desenvolvida numa dinâmica de trabalho cooperativo, com momentos de discussão coletiva e negociação de resultados.

Os resultados revelaram que o trabalho realizado envolveu todos os processos e subprocessos de raciocínio, ainda que com níveis de desafio diferentes. Na *construção de modelos mentais*, a *interpretação visual da informação* e a *identificação de subconjuntos dos objetos* que integrados resultassem no objeto completo foram realizados com alguma facilidade; já a *coordenação dos subconjuntos* constituiu um desafio maior. Quanto à *análise, transformação e operação sobre os modelos mentais*, considera-se que *a observação e análise de imagens mentais* foi realizada com sucesso na maioria das vezes, o que contribuiu para *a transformação de imagens mentais noutro tipo de informação* — a explicitação das relações entre os elementos dos sólidos. Já *a transformação de imagens mentais noutras imagens mentais* assume diferentes níveis de dificuldade.

No que respeita ao contributo da abordagem para o desenvolvimento do raciocínio espacial, considera-se que a mobilização de vários processos foi particularmente promovida por alguns fatores: a complexidade dos sólidos utilizados e da operação de secção por um plano que deve ser adequada aos indivíduos a que se destina, mantendo um nível de desafio cognitivo elevado mas alcançável; a existência de modelos físicos para os sólidos platónicos e a inexistência do mesmo tipo de modelo para os truncados que obrigou a um trabalho mental que não seria realizado se existissem os modelos para todos os sólidos; o pedido do número de faces, vértices e arestas que, associada à complexidade dos objetos, implica a sua estruturação; o estabelecimento de relações e sua justificação que reforça a necessidade de estruturação. No que respeita à dinâmica, a interação entre os participantes com a comunicação dos seus raciocínios foi um elemento determinante para o sucesso da atividade, pois o confronto de respostas diferentes resultou na revisão do raciocínio dos futuros professores ou no seu enriquecimento, decorrente da diversidade de perspetivas.

Relação dos artigos com o objetivo e as questões do estudo

O objetivo deste estudo é a análise do desenvolvimento do raciocínio geométrico de futuros professores a partir de uma experiência de formação. Contudo, assumir tal empreendimento implica reconhecer a amplitude do objeto de estudo. Seria possível analisar o raciocínio geométrico tendo em conta a natureza da tarefa em que está implicado, como a resolução de problemas, explorações e investigações; os processos matemáticos em que intervém, como conjeturar, generalizar ou justificar; a natureza do raciocínio que é convocado, como o indutivo, abdutivo e dedutivo; as formas de representação próprias, como os desenhos estáticos ou dinâmicos, etc. Assim, foi necessário assumir uma forma de operacionalizar a análise do raciocínio geométrico que, simultaneamente, fosse coerente com aspetos valorizados na unidade curricular e a conceção de raciocínio geométrico desenvolvida neste estudo. Essa opção resultou na análise do raciocínio geométrico a partir dos processos de classificar, definir, generalizar e justificar, tendo presente ainda uma componente que considerei específica deste tipo de conhecimento — o raciocínio espacial.

Desta forma, três dos artigos centram-se em três processos: o artigo 1 no processo de classificar, o artigo 2 no processo de definir e o artigo 3 no processo de justificar relações em figuras geométricas. O processo de generalizar surge em todos os artigos, da seguinte forma: nos artigos 1 e 2, na medida em que quer o processo de definir, quer de classificar, implicam uma generalização; no artigo 3, porque as justificações incidem em generalizações sobre famílias de figuras geométricas; no artigo 4, porque as relações pedidas são igualmente generalizações, embora para uma classe finita de objetos. Desta forma, o processo de generalizar surge efetivamente como muito relevante na experiência de formação, muito embora não tenha sido analisado separadamente. Finalmente, o artigo 4 foca-se no raciocínio espacial, um tipo de raciocínio que também surge associado aos outros processos noutros artigos, mas que é aqui o centro da análise.

Retomo agora as questões do estudo para indicar, mais especificamente, o contributo de cada artigo:

Questão 1. Quais os conhecimentos que as formandas revelam sobre os processos de classificar e definir figuras geométricas, bem como justificar generalizações em figuras geométricas, e quais os aspetos que influenciam a sua aprendizagem?

Os artigos 1, 2 e 3 contribuem para responder a esta questão da seguinte forma:

- O artigo 1 centra-se no processo de classificar e há um foco importante na evolução das formandas ao longo da experiência, sendo o artigo que apresenta dados de mais tarefas e com maior dispersão no tempo (desde a primeira à penúltima aula). Na análise que é feita, o conhecimento sobre o processo de classificar expressa-se em termos do tipo de classificações que produzem e que decorrem, na maioria dos casos, da forma como analisam as figuras — com base em imagens prototípicas ou com base nos atributos das figuras (críticos ou não críticos). São ainda evidenciados outros aspetos que influenciam o processo de classificar, como a interpretação da linguagem e o raciocínio lógico.

- O artigo 2 centra-se no processo de definir com alguma expressão no que respeita à evolução, embora com menor destaque uma vez que se dedicou menos tempo a este processo do que a classificar. O conhecimento que as formandas revelam sobre o processo de definir expressa-se em termos dos requisitos a que obedecem quando selecionam ou constroem uma definição, nomeadamente se têm em conta que a condição que apresentam deve ser necessária, suficiente, tendencialmente mínima e inclusiva (quando os conceitos se organizam hierarquicamente).

- Nos artigos 1, 2 e 4 há tarefas em que é pedido que as formandas justifiquem afirmações pelo que, embora sejam focados noutros processos, estes artigos contribuem também para caracterizar o conhecimento sobre o processo de justificar. Contudo, dada a grande abrangência do processo de justificar e dada a importância do processo de generalizar relações geométricas, o artigo 3 contribui para a questão 1 restringindo-se às justificações que as formandas fazem sobre generalizações em famílias infinitas de figuras do plano e do espaço. Este conhecimento é descrito em termos da natureza dos argumentos que as formandas utilizam (se se suportam na estruturação geométrica das figuras), da mobilização de argumentos válidos (propriedades relevantes e estabelecidas) e do grau de generalidade da linguagem usada.

Questão 2. De que forma o raciocínio espacial intervém nos processos de classificar, definir e justificar generalizações sobre figuras geométricas, e qual o contributo de atividades em torno destes processos para o seu desenvolvimento?

Os artigos 2, 3 e 4 contribuem para responder a esta questão da seguinte forma:

- No artigo 2, analisam-se as propriedades que as formandas explicitam na formulação das definições que, por sua vez, determinam as classes. A identificação das propriedades implica o estabelecimento de relações entre os elementos das figuras e a sua descrição em termos de conceitos formais, ou seja, implicam a sua estruturação espacial e geométrica, duas formas de abstração que são usadas para raciocinar. Neste sentido, o artigo 2 contribui para esta questão ao estabelecer uma relação entre o processo de definir e a estruturação espacial e geométrica das figuras.

- No artigo 3, analisam-se os argumentos que as formandas usam para justificar generalizações de figuras geométricas. Uma vez que se considerou necessário que estes argumentos permitissem compreender o porquê de a generalização ser verdadeira, também neste processo foi mobilizada a estruturação espacial e geométrica.

- No artigo 4, estudam-se os processos de raciocínio espacial, nomeadamente a construção de modelos mentais e a análise e transformação de modelos mentais e as operações com estes modelos. Este estudo realiza-se no contexto de uma tarefa de construção de generalizações sobre uma classe de sólidos e respetivas justificações, pelo que se estabeleceu uma relação entre o raciocínio espacial, generalizar e justificar.

Questão 3. Quais os aspetos da experiência de formação que se revelaram mais significativos relativamente ao contributo para o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos futuros professores?

Todos os artigos contribuem para responder a esta questão, na medida em que todos contemplam opções tomadas que caracterizam a experiência de formação. Além dos próprios processos já referidos, são analisados o papel dos recursos (artigos 1 e 4), o contributo das tarefas realizadas (artigos 3 e 4) e a análise das interações decorrentes do trabalho colaborativo e das discussões das tarefas (artigos 1 e 4).

5 Discussão dos resultados

Neste capítulo são discutidos os resultados do estudo, com base nos dados apresentados nos quatro artigos, de modo a responder às questões formuladas. Em cada momento é indicado o artigo a que respeitam os resultados referidos e, no caso de aludir a um episódio ou resultado específico, é indicada a respetiva página.

Questão 1. Quais os conhecimentos que as formandas revelam sobre os processos de classificar e definir figuras geométricas, bem como justificar generalizações sobre figuras geométricas, e quais os aspetos que influenciam a sua aprendizagem?

Classificar. No que diz respeito ao processo de classificar, o conhecimento é analisado sobretudo a partir dos tipos de classificações produzidas, mais especificamente dos níveis de compreensão das relações hierárquicas (Fujita, 2012). Para melhor compreender as razões que explicam os tipos de classificação que as futuras professoras produziram, abordo ainda alguns resultados relativos aos aspetos referidos por Markman (1989) e Mariotti e Fischbein (1997) que considero fundamentais na compreensão do processo de classificar. Todos os resultados referem-se ao artigo 1.

Para todas as formandas, as tarefas de classificação constituíram um desafio significativo e, particularmente no caso dos quadriláteros, os resultados são consistentes com estudos que revelam dificuldades que afetam alunos de vários níveis de ensino, bem como futuros professores, em diferentes países, incluindo Portugal (De Villiers, 1994; Fujita, 2012; Fujita & Jones, 2007; Monaghan, 2000; Okazaki & Fujita, 2007; Tempera, 2010). Os resultados deste estudo permitem-nos aprofundar a nossa compreensão sobre os aspetos que influenciam ou podem apoiar esta aprendizagem.

No início da unidade curricular, apenas algumas formandas mostraram conhecer relações hierárquicas entre quadriláteros, especificamente entre quadrado e retângulo, e compreender essa relação. O trabalho realizado possibilitou que, progressivamente, fossem estabelecendo mais relações, mas houve uma progressão distinta consoante estas relações eram mais ou menos diretas. Concretamente, na etapa correspondente à tarefa de classificação de quadriláteros, as formandas situaram-se no nível de compreensão *classificação hierárquica* para os retângulos e os paralelogramos, mas cerca de metade apenas no nível *classificação parcialmente prototípica* para os papagaios, já que para estes admitiam algumas relações, mas não que um quadrado seja um papagaio. Esta alternância nos níveis de compreensão da classificação das figuras deve-se ao facto de estas formandas analisarem as figuras de forma diferente: para os retângulos e para os paralelogramos conseguiram fazer um juízo analítico, com base nos atributos críticos das figuras; já para os papagaios foram influenciadas pela figura protótipo, quer através da imagem, quer das suas propriedades (Hershkowitz, 1989).

A classificação dos prismas, realizada na etapa final da unidade curricular, registou uma melhoria assinável e que considerei surpreendente. Efetivamente, durante a resolução da tarefa, todas as formandas construíram diagramas com uma correta organização dos sólidos e formularam relações entre prismas independentemente de partilharem um maior ou menor número de atributos. Contudo, na tarefa do teste final, realizada pouco tempo depois, as participantes resolveram uma questão que envolvia a classificação dos quadriláteros e o seu sucesso não foi tão grande: cerca de um terço deu respostas consistentes com um nível de compreensão *classificação hierárquica* para os paralelogramos e para os papagaios e as restantes deram respostas que as posicionam em níveis de compreensão diferentes consoante a figura (*classificação hierárquica* ou *classificação parcialmente prototípica*) ou foram inconclusivas, havendo apenas uma formanda a exibir um nível de compreensão *classificação prototípica* para as duas classes.

Analisando a evolução das formandas, alguns aspetos sobressaem como determinantes para a aprendizagem da classificação hierárquica das figuras. Em primeiro lugar, foi necessário aprender que cada figura particular deve ser encarada como um representante da sua classe (Mariotti & Fischbein, 1997). As formandas dominavam parcialmente esta noção, provavelmente sem grande consciência dela, pois durante toda a sua escolaridade foram expostas a textos matemáticos em que, por exemplo, uma representação de um quadrado pretendia significar um qualquer quadrado. Contudo, algo diferente é compreender que no estudo das propriedades das figuras e sua organização trabalhamos com as classes de figuras, incluindo os seus casos particulares (ou seja, um losango também é um representante dos papagaios). Assim, neste estudo podemos ver como esta ideia não era dominada inicialmente (artigo 1, p. 117), havendo uma progressão significativa no final, com formandas a discutir as relações entre figuras claramente focadas nas suas classes (artigo 1, p. 126).

Em segundo lugar, para classificar é preciso compreender que uma classe é determinada pelas propriedades que são comuns a objetos figurativamente diferentes (Mariotti & Fischbein, 1997). Na prática, isto significa que para averiguar se uma figura pertence a uma classe, temos de investigar se ela verifica as propriedades da classe, independentemente de ter ainda outras — um procedimento em que foi necessário insistir (artigo 1, p. 123). Esta ideia parece relativamente simples mas, quando aplicada a classificações hierárquicas, o seu domínio envolve compreender a assimetria das propriedades entre figuras (Markman, 1989) e a "relação de inclusão de direção oposta" (Hershkowitz et al., 1987). Isto significa que se o conjunto de atributos da figura A é um subconjunto de atributos da figura B, então a figura B é uma subclasse da figura A, uma ideia que pode criar um conflito cognitivo. De facto, em várias situações, as participantes ficaram confusas sobre a direção da inclusão, uma dificuldade que ainda se verificou no final da unidade com algumas delas (artigo 1, p. 129).

Em terceiro lugar, outro aspeto que influenciou a classificação hierárquica das figuras diz respeito à sua familiaridade e conceptualização prévia. Efetivamente, na fase de classificação dos quadriláteros, muitas formandas tiveram dificuldade em libertar-se da imagem prototípica, sobretudo quando comparavam figuras "mais distantes", ou seja, figuras que partilhavam um menor número de atributos críticos, como o papagaio e o quadrado (artigo 1, p. 122). Efetivamente, este aspeto influenciou tão fortemente o raciocínio das formandas que, nalguns casos, se sobrepôs ao raciocínio lógico. Concretamente, mesmo aplicando a propriedade transitiva — outra competência necessária para classificar hierarquicamente referida por Markman (1989) — e deduzindo que um quadrado é um papagaio, algumas formandas questionaram a validade desta conclusão devido às diferenças entre as figuras prototípicas. Já na fase de classificação dos prismas, além do maior domínio sobre o processo em si mesmo, as formandas pareceram menos constrangidas pelo conhecimento prévio daqueles sólidos e consequente fixação nas figuras prototípicas, não se registando o mesmo tipo de perturbação.

Em quarto lugar, assinalo um aspeto que influenciou a compreensão sobre as classificações e que diz respeito à linguagem utilizada e sua interpretação. Uma faceta desta dimensão é abordada por Markman (1989) quando afirma que compreender as classificações implica aceitar que podemos atribuir nomes diferentes ao mesmo objeto. Esta ideia parece ser bem aceite, mas a tendência natural é para assumir que quando se alude a um nome não incluímos as suas subclasses, a não ser que haja alguma indicação em contrário (por exemplo, paralelogramo referir-se apenas a "paralelogramo obliquângulo", artigo 1, p. 130). É como se existisse uma espécie de micromundo, onde temos em consideração esta organização hierárquica, e o mundo “normal” da matemática em que falamos das figuras na sua aceção mais corrente, ou seja, organizadas de forma exclusiva. Contudo, além deste aspeto referido por Markman, outros elementos de linguagem são influenciadores. Afirmações como “lados consecutivos iguais dois a dois” é entendida muitas vezes como “exatamente dois pares de lados consecutivos iguais”, o que impede que figuras com três ou mais lados iguais de pertenceram à mesma classe (artigo 1, p. 121). Da mesma forma, “um retângulo é um paralelogramo” pode ser entendido como “é o mesmo que” (Brunheira & Ponte, 2015), pelo que é importante explicitar os significados e diversificar a linguagem usando expressões como “é um caso particular de” (De Villiers, 1994). Também os nomes das classes são relevantes. A palavra “quadrilátero” aponta simplesmente para a ideia de “quatro lados”, o que facilita o entendimento do conceito; já a palavra “quadrangular”, embora tenha a sua raiz na ideia “quatro ângulos”, é muito mais associada a “quadrado” pela sua parecença, o que acaba por enviesar o seu significado. Esta influência é também reconhecida por autores como Bussi e Baccaglini-Frank (2014) que referem como palavras correspondentes, em diferentes línguas, geram diferentes reações nos alunos.

Finalmente, termino com um aspeto omisso na literatura referida neste estudo e que diz respeito à utilização de diferentes tipos de diagramas como meio de representar as relações entre figuras. De facto, a utilização de diferentes tipos de diagramas, seja para o seu preenchimento com os critérios de classificação ou com os elementos de cada conjunto, seja ainda a sua completa construção, parece constituir um suporte importante à organização do pensamento e, simultaneamente, um meio promotor da análise mais completa das propriedades e relações entre figuras (artigo 1, p. 119).

Definir. No que diz respeito ao processo de definir, o conhecimento é analisado em termos dos tipos de definições produzidas e dos requisitos a que as participantes obedecem quando selecionam ou constroem uma definição, nomeadamente se têm em conta que a condição que apresentam deve ser necessária, suficiente, tendencialmente mínima (Leikin & Zazkis, 2010) e inclusiva, quando os conceitos se organizam hierarquicamente (De Villiers et al., 2009). Para melhor compreender as razões que explicam os tipos de definição que as futuras professoras produziram, abordo ainda alguns resultados relativos aos aspetos que influenciaram o processo de definir. Todos os resultados referem-se ao artigo 2.

No início da unidade curricular, a atividade de construir e analisar definições era completamente estranha às formandas. Como é óbvio, a utilização de definições já fazia parte da sua experiência anterior e, mesmo sem nunca terem discutido o significado, os requisitos ou a importância de uma definição, as formandas foram construindo as suas próprias conceções moldadas pela sua experiência de utilização de definições (Vinner, 1991), resultando numa noção difusa, com aspetos corretos e outros incorretos, como afirmam Zaslavsky e Shir (2005), alguns deles difíceis de alterar.

Tal como referem Zaskis e Leikin (2008), a construção de definições constitui uma ferramenta de investigação para compreender o significado que os indivíduos atribuem às definições e aceder à compreensão que têm sobre os conceitos que estão a ser definidos, o que é confirmado por esta investigação. Assim, este processo permitiu-me compreender que, no início da unidade, as participantes revelavam ideias semelhantes sobre os requisitos de uma definição, que podemos observar pelos resultados da tarefa de diagnóstico. De uma maneira geral, a definição era confundida com uma proposição verdadeira, ou seja, a definição era considerada válida sempre que a condição fosse verificada pela figura a definir (isto é, se a condição fosse necessária). O trabalho desenvolvido na unidade procurou clarificar o conceito de definição, confirmando que as propriedades apresentadas devem corresponder a condições necessárias, mas sublinhando também que devem ser suficientes e inclusivas (quando aplicável). Além destes requisitos, foi apresentado o conceito de definição económica, procurando que as definições propostas fossem deste tipo.

Para discutir o conhecimento relativo ao processo de definir que as formandas revelaram, é necessário ter em conta as figuras em que incidiu, pois estas influenciaram fortemente o tipo de definições produzidas. Assim, os resultados obtidos relativos ao processo de definir dizem respeito a três figuras: o retângulo e o papagaio (definições pedidas na mesma tarefa, duas por figura, no final da sequência sobre quadriláteros) e o paralelepípedo (pedido de uma definição, próximo do final da unidade). No que diz respeito ao retângulo, cerca de 79% apresentou definições corretas e 29% conseguiu que uma delas fosse económica, tendo a restante parte da turma (21%) apresentado uma definição incorreta e, à exceção de um caso, uma definição correta. Os casos de definições incorretas resultam de condições que não são suficientes ou condições que não são necessárias, mas apenas por tornarem a definição exclusiva. Desta forma, estes dados apontam para uma compreensão melhor do que a registada no diagnóstico sobre o conceito de definição, nomeadamente, a consolidação de que a condição deve ser necessária, mas também suficiente. Contudo, quando analisamos os dados relativos às definições de papagaio, observamos um fenómeno diferente: quase metade da turma (46%) não conseguiu construir definições corretas e apenas 25% conseguiu que uma das definições fosse correta, mantendo-se uma reduzida produção de definições económicas. Além desta diferença, é de notar que as definições incorretas derivam de problemas diferentes, ou sejam, as condições não são necessárias e/ou suficientes e algumas são exclusivas. Finalmente, na definição de paralelepípedo, cerca de metade apresentou definições corretas e um terço definições económicas, havendo uma pequena parte de definições incorretas por não serem suficientes, uma diferença que deve ser interpretada tendo em consideração que a formulação da tarefa era mais dirigida.

Analisando agora os fatores que emergem como influenciadores do tipo de definições construídas, destaco três. Em primeiro lugar, a construção do conceito de definição, que se subdivide em vários aspetos. Como já referi, no início da unidade, as formandas atendiam a que a condição fosse necessária, um critério que é natural observar, pois não faz sentido que a definição de um objeto apresente uma condição que não seja cumprida por alguns objetos. Já o critério da suficiência revelou ser mais difícil de dominar, o que pode acontecer por várias razões. Por um lado, compreender que a condição tem de ser necessária e suficiente, significa compreender que não pode dizer respeito a outras figuras, razão pela qual "polígono de quatro lados iguais" não define quadrado, mesmo que esta afirmação se verifique para aquela figura. Por outro lado, esta mesma ideia é de certa forma contrariada quando sugerimos que as definições sejam inclusivas o que, na perspetiva de uma formanda, torna a definição ambígua (artigo 2, p. 155). De facto, além do domínio da classificação de figuras, é preciso compreender que a definição e a classificação são interdependentes. Porém, a necessidade natural de distinguir classes e subclasses nas suas definições conduziu algumas participantes a produzirem definições incorretas por incluírem condições não necessárias, uma ideia que não foi fácil de desconstruir (artigo 2, p. 155). Finalmente, o conceito de definição económica revelou-se particularmente difícil, muito embora a ideia de que uma definição não deva incluir todas as propriedades da figura tenha sido vista, aparentemente, como algo natural.

O segundo fator que influencia o processo de definir diz respeito à figura em causa e, em particular, as relações e os elementos em que a definição se pode apoiar. Por exemplo, a escolha de definições de quadrado mostrou que as formandas conheciam sobretudo as que se referem aos elementos visíveis (lados e ângulos) que estão associadas a propriedades habitualmente conhecidas, revelando uma familiaridade e um domínio muito menor dos conceitos e propriedades que envolvem elementos ocultos, como os eixos de simetria e as diagonais. Este aspeto não limitou tanto a construção de definições para retângulo, ao contrário da definição de papagaio em que as propriedades não são tão evidentes. Voltarei a este aspeto a propósito da influência do raciocínio espacial.

Em terceiro lugar, outro aspeto determinante são as ferramentas cognitivas que as formandas têm ao seu dispor para induzir que uma condição é necessária e deduzir que uma condição é suficiente (e económica, deduzindo umas propriedades de outras). Como sugerem Mariotti e Fischbein (1997), elaborar uma definição implica um duplo processo do geral para o particular e vice-versa, observando e identificando as propriedades. Isto significa, por exemplo, que se deve induzir que todos os papagaios têm diagonais perpendiculares a partir de um conjunto de representantes que, na verdade, é bastante diferenciado. Ter diagonais perpendiculares é, assim, uma condição necessária. No entanto, para averiguarmos se a condição é suficiente, precisamos procurar no universo dos quadriláteros se há algum elemento com diagonais perpendiculares que não seja um papagaio. Esta tarefa tem um grau de dificuldade relativo para este caso, pois não é muito difícil descobrir um tal quadrilátero. Contudo, este raciocínio pode ser muito mais complexo se o universo em causa for muito amplo, tal como aconteceu relativamente à proposta de definição para paralelepípedo que se limitava aos poliedros cujas faces são paralelogramos (artigo 2, p. 159). Por último, restringir uma condição até que esta se torne uma definição económica, significa compreender que há propriedades que implicam outras (por exemplo, que se as faces opostas de um poliedro com seis faces forem iguais, elas terão de ser paralelas), o que é algo bastante exigente e que, em muitos casos, ultrapassa os conhecimentos das formandas.

Finalmente, uma última observação sobre a aprendizagem do processo de definir. Os resultados do estudo mostram que as formandas desenvolveram o seu conhecimento sobre as definições e sobre o processo de definir, mas são evidentes as dificuldades registadas, particularmente em produzir definições económicas. Contudo, é de salientar que chegar às definições das figuras não constituiu um fim em si mesmo. A proposta de definir figuras seguindo a trajetória desta experiência não é uma orientação a seguir para todos os casos (aliás como aconteceu para a definição de prisma apresentada na tarefa

“Prismas”, anexo J) e é encarada como um desafio que promove, sobretudo, o raciocínio geométrico, o que pode acontecer mesmo quando se chega uma definição incorreta (artigo 2, p. 160). Desta forma, tal como defende De Villiers (1998), a valorização deste processo incide mais na atividade matemática do que no produto, tal como acontece com outras atividades como a resolução de problemas.

Justificar. No que diz respeito ao processo de justificar, o conhecimento é analisado a partir da natureza dos argumentos que as formandas utilizam (se se suportam na estruturação geométrica das figuras, Battista, 2007), da validade dos argumentos mobilizados (propriedades relevantes e estabelecidas, Stylianides, 2007) e do grau de generalidade da linguagem usada para explicitar que a relação se aplica a todos os casos do domínio (Lannin et al., 2011). Além desta caracterização, abordo ainda alguns resultados relativos aos aspetos que influenciaram o processo de justificar. Os resultados referem-se sobretudo ao artigo 3, onde são apresentados os dados relativos à realização de duas tarefas. Apesar de estes dados não serem diretamente comparáveis do ponto de vista evolutivo, pelo facto de as tarefas terem sido realizadas em contextos diferentes e com formulações consideravelmente distintas, eles são reveladores do conhecimento das formandas relativamente ao processo de justificar. Complementarmente, referirei alguns dados relativos ao artigo 4 que, embora focado no raciocínio espacial, apresenta dados sobre a justificação de generalizações de uma classe finita de sólidos.

No que diz respeito à natureza dos argumentos, as resoluções apresentadas baseiam-se quase sempre na estruturação geométrica das figuras, com a mobilização de propriedades relevantes e já estabelecidas. Esta conclusão aplica-se particularmente à tarefa sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono de *n* lados, o que provavelmente decorre da sua formulação que sugere três estratégias para justificar a relação. Já a tarefa final sobre a família de poliedros revela ainda que uma parte da turma (28%) usa argumentos que não se baseiam nas propriedades das figuras, recorrendo antes a regularidades numéricas ou ao teste da expressão apresentada, o que corresponde essencialmente a uma justificação com base em argumentos empíricos, um erro muito comum nos futuros professores dos primeiros anos (Stylianides & Stylianides, 2009). Não obstante, na tarefa sobre os sólidos platónicos truncados (artigo 4), a análise do discurso mostra como os grupos justificam as suas conclusões recorrendo consistentemente à estruturação geométrica.

Apesar de algumas formandas ainda usarem argumentos inválidos na tarefa do teste final, a forma como resolveram as tarefas apresentadas corresponde a uma evolução significativa relativamente à sua primeira abordagem à justificação de generalizações. De facto, quando anteriormente lhes foi pedido que justificassem a congruência dos ângulos verticalmente opostos, as formandas registaram muitas dificuldades pelo facto de a representação que acompanhava a tarefa não conter quaisquer valores (artigo 3, p. 174), o que gerou quatro tipos de situações: desistência; justificar a relação repetindo a definição de ângulos verticalmente opostos; justificar com base na experiência no GeoGebra; e utilizar um raciocínio circular (Brunheira & Ponte[8], 2017). Na verdade, nenhuma formanda conseguiu resolver aquela tarefa sem ajuda e todas as justificações produzidas basearam-se em argumentos inválidos. Já na tarefa sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos de polígonos, ainda se registou alguma resistência inicial e uma tentativa de usar dados baseados na perceção sobre a figura, uma reação que é relativamente comum e já identificada em investigações anteriores (Battista, 2007). Contudo, com o desenrolar da atividade, a mobilização de propriedades relevantes e já estabelecidas foi bem-sucedida e as formandas foram além da proposta inicial, confrontando estratégias baseadas em diferentes propriedades.

Do ponto de vista da linguagem utilizada, registam-se algumas diferenças nas resoluções das duas tarefas. Por um lado, na tarefa sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos dos polígonos verificamos alguma resistência na construção de uma argumentação completa e articulada, havendo várias justificações baseadas em expressões numéricas com a explicação do significado de alguns valores. Além disso, estas justificações são muito focadas no exemplo do hexágono, na maioria dos casos sem ser tratado como exemplo genérico, nem haver a preocupação de estender o raciocínio a outros casos. Por outro lado, na tarefa da família de poliedros, nota-se a preocupação em construir uma argumentação mais completa, possivelmente favorecida pelo contexto avaliativo, mas que evidencia uma consciência de que a justificação deve mostrar que a generalização se aplica a todos os elementos do domínio.

A experiência desenvolvida permite-nos ainda observar um conjunto de aspetos que influenciam o conhecimento construído sobre justificar generalizações. O primeiro aspeto que emerge diz respeito à natureza das afirmações a justificar que, em geometria,

[8] Neste artigo é feita uma discussão mais aprofundada destas dificuldades e do trabalho que foi feito com vista à sua superação.

se suportam frequentemente em diagramas que representam classes de figuras ou relações geométricas, apesar de essa interpretação não ser muitas vezes clara (Battista, 2007). Esta característica envolve um maior poder de abstração na análise dessas representações, pois há elementos que devem ser desconsiderados por forma a centrarmo-nos nas relações essenciais. Isto significa compreender que, por exemplo, os hexágonos da tarefa sobre a soma dos ângulos internos poderiam ter outra forma ou ser outros polígonos quaisquer, sendo apenas relevantes as suas relações com os outros elementos (os triângulos em que se decompõem ou os ângulos externos).

Este aspeto relativo à abstração liga-se ainda com a utilização de um exemplo genérico, através do qual tornamos explícitas as razões que tornam a afirmação válida, mas tratando-o como um representante característico da sua classe (Balacheff, 1988). Trata-se de um recurso poderoso, muitas vezes a forma mais acessível de justificar, mas não é fácil distingui-lo da utilização indevida de exemplos que, apesar de reforçarem a nossa convicção, não sustentam a validade da afirmação. Talvez por haver dificuldades em compreender qual o papel que um exemplo pode assumir na justificação, na tarefa final surgem justificações que são um misto de argumentos baseados em propriedades e argumentos empíricos.

Finalmente, dois outros aspetos que considero associados podem ter influenciado positivamente a construção de justificações. Um diz respeito ao tipo de tarefas envolvidas — tarefas de *transição entre a conjetura e justificação* (Lin et al., 2012); o outro respeita à forma de encarar o processo de justificar como *investigar o porquê* (Lannin et al., 2011). De facto, na maioria das tarefas em que foi pedida a justificação da generalização, esta foi formulada pelas próprias formandas, constituindo uma conjetura. Este aspeto pode ter tido consequências positivas, que devem ser discutidas de forma diferenciada dependendo se houve, ou não, utilização do AGD.

No caso da tarefa da soma das amplitudes dos ângulos internos, as formandas partiram com a convicção formada de que as expressões gerais a que tinham chegado com recurso ao GeoGebra eram verdadeiras, pelo que aquela tarefa não teve qualquer contributo desse ponto de vista. Contudo, ao contrário dos receios de alguns investigadores de que o AGD possa "matar" a necessidade da justificação (Lin et al., 2012), as formandas envolveram-se significativamente na tarefa. Uma possível explicação para este envolvimento é que a utilização do AGD não nos fornece qualquer pista sobre a razão da regularidade numérica que foi verificada, pelo que cabe à justificação dar resposta a esta questão sobre a qual pode existir uma curiosidade intrínseca, dado o envolvimento das formandas na sua formulação.

Já nos casos das tarefas sobre a família de poliedros e sobre os sólidos platónicos truncados, a própria formulação da generalização pode implicar a identificação das mesmas relações que sustentam posteriormente a justificação. Contudo, há um aspeto adicional em que estas tarefas divergem e que pode influenciar a construção da justificação: a complexidade das relações entre os elementos dos sólidos. De facto, a generalização sobre o número de faces das bipirâmides alongadas emerge facilmente a partir do padrão numérico (*3n*) e não requer que se reproduza o raciocínio que conduziu à obtenção dos valores. Já no caso da tarefa sobre os sólidos platónicos truncados, a contagem de elementos e a procura de generalizações implica uma estruturação das figuras com a identificação das suas relações. Nesse contexto, como podemos observar nos diálogos, formular a generalização é um processo que ocorre natural e simultaneamente com o *investigar o porquê*, o que promove a construção de justificações corretas (artigo 4, p. 201).

Questão 2. De que forma o raciocínio espacial intervém nos processos de classificar, definir e justificar generalizações sobre figuras geométricas, e qual o contributo de atividades em torno destes processos para o seu desenvolvimento?

Neste estudo considero que o raciocínio espacial corresponde capacidade de "*ver*, analisar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações" (Battista, 2007, p. 843). Para compreender mais profundamente a forma como o raciocínio espacial intervém nos processos em estudo, parto ainda das ideias de Battista (2009) e Gutierrez (1996), e considero que este tipo de raciocínio inclui, por um lado, a *construção mental de imagens e modelos* sobre objetos espaciais e relações e, por outro, a *análise e realização de transformações e operações* entre objetos e relações usando as imagens e modelos mentais, ainda que se possam suportar em representações externas. Especificando, os processos referidos envolvem ainda outros subprocessos, respetivamente: a interpretação visual da informação, identificação dos subconjuntos dos objetos, sua coordenação e integração; a observação e análise de imagens mentais, transformação de imagens mentais noutras imagens mentais ou noutro tipo de informação (artigo 4). A construção de modelos mentais é realizada a partir da organização ou configuração que abstraímos dos objetos geométricos de modo a operar com esses objetos, por exemplo, compará-los, decompô-los e analisá-los, o que acontece mesmo quando existem representações externas.

De seguida analisarei os resultados deste estudo sobre a forma como o raciocínio espacial intervém nas atividades realizadas em torno dos processos de classificar, definir e justificar e o contributo destas atividades para o seu desenvolvimento. Os episódios dos artigos que referirei constituem os exemplos que considero melhor apoiarem esta discussão.

Classificar e definir. Começando pelos processos de classificar e definir, a identificação de propriedades das figuras está no centro de cada um destes processos pelo que, em grande medida, a forma como o raciocínio espacial intervém é semelhante. Os resultados do estudo mostram que, no início da unidade, algumas formandas pareciam ignorar ou desconsiderar relações que dizem respeito a elementos invisíveis, o que constituiu um obstáculo à análise de definições (artigo 2, p. 149). Posteriormente, durante o estudo dos quadriláteros com recurso ao GeoGebra, tencionei que as participantes (re)*construíssem os seus modelos mentais* sobre os quadriláteros e as relações entre os seus elementos, tornando cada conceito-imagem viável (Vinner, 1983). Para tal, foi necessário dar uma atenção especial à *interpretação visual da informação* disponibilizada pelo ecrã, nomeadamente, sobre dois aspetos: todas as representações possíveis são casos particulares da classe em estudo? O que significa, conceptualmente, poder obter uma figura a partir de outra por arrastamento, por exemplo, um losango a partir de um papagaio (artigo 1, p. 117)?

A investigação das propriedades dos quadriláteros evidenciou a existência de modelos mentais dos quadriláteros muito limitados pelas imagens prototípicas, sensíveis a aspetos como a posição e a configuração global da representação (artigo 1, pp. 116-117). Uma vez que a identificação de propriedades e consequente classificação das figuras requer a *análise e reflexão sobre os objetos espaciais e relações* a partir desses modelos mentais, tal limitação levou à formulação errada de algumas propriedades e dificuldades na classificação hierárquica dos quadriláteros (artigo 1, p. 117). Efetivamente, estes dados mostram-nos como a *análise e reflexão sobre objetos espaciais e relações* não se baseia simplesmente nas representações externas, mesmo quando estas são fornecidas, mas num misto destas representações com os modelos mentais previamente existentes. Desta forma, este processo pode ser tão mais difícil quanto maior for a experiência e fixação nesses modelos, como os dados nos mostram (artigo 1, p. 122).

A definição de raciocínio espacial, apresentada por Battista (2007), refere a ação *ver* (entre aspas no original) que entendo num sentido mais amplo do que apenas "ver o invisível" (Arcavi, 2003, p. 216). Uma metáfora interessante é a de "olho geométrico", da autoria do matemático do início do século XX Charles Godfrey, e recuperada por Fujita e Jones (2002). "Olho geométrico" significa "o poder de ver as propriedades geométricas destacadas da figura" (Fujita & Jones, 2002, p. 385). Efetivamente, *ver* pode significar também que damos mais atenção a alguns elementos e menos a outros, através da *identificação de subconjuntos do objeto*. Isto pode acontecer espontaneamente devido à forma como percecionamos os objetos — a qual é influenciada por diferentes fatores (Veloso, 1998) — ou pode ser intencional. De facto, para classificar hierarquicamente, ao mesmo tempo que destacamos algumas propriedades, devemos desconsiderar outras. Por exemplo, para aceitar que um quadrado seja um retângulo, é preciso ignorar a congruência dos lados que não é um atributo crítico nesta classe; para aceitar que seja um losango, já precisamos de ignorar a congruência dos ângulos. No entanto, como afirmam Mariotti e Fischbein (1997), a necessidade de generalização entra em conflito com a necessidade de diferenciação, o que aconteceu quer durante a classificação de quadriláteros (artigo 1, p. 122), quer durante a definição (artigo 2, p. 152, 155).

Desta forma, este estudo mostra como um raciocínio espacial baseado em modelos limitados de figuras, circunscritos a imagens prototípicas e relações elementares, constitui um obstáculo significativo à definição e classificação de figuras geométricas, neste último caso com vários fatores já identificados na literatura anteriormente referida. Contudo, o trabalho realizado com as formandas mostra que a (re)construção desses modelos mentais é um trabalho difícil, mas necessário e possível e que o desenvolvimento de atividades com vista à definição e classificação de figuras pode promover significativamente o raciocínio espacial. De facto, o estudo das propriedades das figuras e sucessiva classificação levou as formandas a *verem* elementos e relações diferentes das que conheciam, nomeadamente usando diagonais ou eixos de simetria, e comparar figuras analisando aspetos comuns e outros divergentes (artigo 1, p. 119). No que respeita ao processo de definir, há dois aspetos a assinalar. Por um lado, a formulação da definição conduz-nos à *construção mental de imagens* e operar sobre elas, de modo a verificar se os objetos que cumprem tal condição correspondem a todos os possíveis elementos dessa classe (artigo 2, p. 160), num exercício claro de raciocínio espacial. Por outro lado, a facilidade com que geramos essas imagens depende da *interpretação visual da* *informação*, o que remete para o tipo e quantidade de propriedades que fornecemos na definição, o que explica, em parte, por que razão há definições que não têm vantagem em ser económicas ou recorrem sistematicamente a relações mais facilmente identificáveis (artigo 2, p. 151).

Concluindo, a classificação e definição de figuras implica a construção de modelos mentais que reflitam uma correta e completa estruturação geométrica. Por exemplo, se o modelo mental que um indivíduo tem sobre papagaios destacar a propriedade "dois pares de lados consecutivos iguais", podemos procurar visualizar os restantes quadriláteros destacando igualmente essa propriedade, tal como na Figura 4, o que nos leva a compreender a razão pela qual as figuras pertencem todas à mesma classe. Alternativamente, podemos destacar a propriedade "diagonais perpendiculares, com uma das diagonais a bissetar a outra", como mostra a Figura 5.

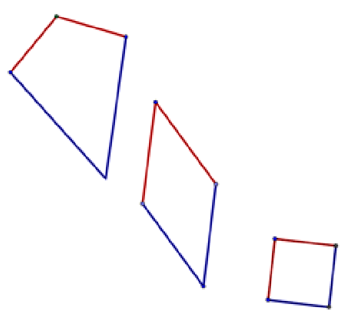


Figura 4. Família dos papagaios com as relações entre os lados destacadas.

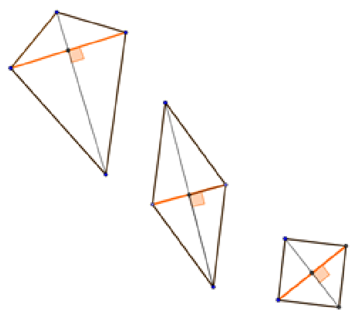


Figura 5. Família dos papagaios com as relações entre as diagonais destacadas.

Em última análise, é possível deduzir toda a hierarquia entre as figuras analisando apenas o conjunto das suas propriedades, como sugerem Fujita e Jones (2007), o que requer operar ao nível da estruturação lógica (Battista, 2009). Porém, os dados apresentados indicam que isso pode ser insuficiente se os nossos modelos mentais contrariarem tal raciocínio (artigo 1, p. 122). Como afirma Herskowitz (1989), a forma como identificamos as figuras não é um processo puramente analítico, pelo que o desenvolvimento do raciocínio geométrico tem de estar alicerçado num raciocínio espacial que assenta em modelos mentais complexos, que reconhecem vários elementos e relações, favorecendo uma compreensão profunda da forma como organizamos os objetos geométricos.

Justificar. Como referi anteriormente, neste estudo considero que as justificações de generalizações sobre famílias de figuras geométricas dependem da natureza dos argumentos, nomeadamente se são baseados numa correta estruturação geométrica, e da sua validade, bem como do grau de generalidade da linguagem utilizada para os explicitar (artigo 3). Desta forma, o raciocínio espacial intervém na identificação das propriedades relevantes que suportam a argumentação. Neste ponto, apresento uma análise dos processos de raciocínio espacial que foram mobilizados em três tarefas que envolvem a justificação de generalizações sobre famílias de figuras geométricas: a tarefa sobre a soma dos ângulos internos de polígonos (artigo 3), a tarefa sobre as bipirâmides alongadas (artigo 3) e a tarefa sobre os sólidos platónicos truncados (artigo 4), a qual mereceu uma análise detalhada do ponto de vista do raciocínio espacial no artigo.

Durante a construção de justificações de generalizações sobre famílias de figuras geométricas, todos os processos relativos à construção dos modelos mentais foram mobilizados. Considerando especificamente a *identificação, coordenação e integração de subconjuntos dos objetos*, estes processos podem implicar um grau de dificuldade distinto, mesmo quando incidem nos mesmos objetos. Vejamos o caso da justificação sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono a partir dos três hexágonos apresentados na tarefa (artigo 3). Esta atividade evidenciou um nível de dificuldade crescente consoante se desenrolou a partir da estratégia sugerida pelo primeiro, segundo ou terceiro hexágono, caso este em que nem todas as formandas foram bem-sucedidas. A razão que parece explicar melhor esta diferença é a necessidade de recorrer a subconjuntos dos objetos que parecem não estar envolvidos diretamente na relação. Concretamente, no primeiro hexágono, é necessário identificar os ângulos dos triângulos (os subconjuntos), coordená-los para compreender que os ângulos adjacentes compõem os ângulos internos do polígono, e integrá-los para concluir que todos os ângulos internos dos triângulos compõem os ângulos internos dos polígonos. Já no segundo hexágono, parte deste raciocínio deve ser mobilizado, mas surgem ainda os ângulos dos triângulos com o vértice no interior do hexágono e que não se relacionam com os ângulos deste, parecendo um subconjunto “estranho” à relação e que algumas formandas não souberam logo como relacionar (artigo 3, p. 179). Também para o terceiro hexágono é necessário mobilizar os ângulos externos (o subconjunto “estranho”) e coordená-los com os ângulos internos de modo a identificar que são suplementares. Contudo, existe uma diferença entre estes dois casos: enquanto, no segundo hexágono, a soma dos ângulos internos dos triângulos que têm vértice no interior do hexágono tem uma *interpretação visual* imediata (formam um ângulo giro), essa interpretação não é acessível no terceiro hexágono (implicaria uma transformação das imagens mentais noutras imagens mentais que é complexa), pelo que é necessário recordar a propriedade sobre a soma dos ângulos externos de um polígono.

Todos os subprocessos referidos anteriormente podem ser também aplicados às tarefas que envolveram sólidos geométricos. Por exemplo, para o caso da família de bipirâmides alongadas (artigo 3), a identificação dos subconjuntos dos objetos segue naturalmente a decomposição sugerida no enunciado (duas pirâmides e um prisma) e a sua coordenação permite compreender que existem tantas faces laterais das pirâmides quantas as do prisma e que as bases de ambos desaparecem; a integração destes subconjuntos gera o sólido, um processo que parece fácil para este caso.

Esta analogia levanta duas questões: existem diferenças no que respeita aos processos de raciocínio espacial envolvidos quando justificamos generalizações em famílias de figuras do plano e do espaço? Quais os processos de raciocínio espacial que podem alterar o nível de dificuldade da atividade? Os dados recolhidos a partir da resolução da tarefa sobre os sólidos platónicos truncados (artigo 4) ajudam-nos a responder a estas questões. Um dos aspetos que emerge desta tarefa como mais complexo é *a observação e análise das imagens mentais*. Embora recorrendo a modelos físicos, a observação e análise dos sólidos tende a ser mais difícil do que as figuras do plano, já que não observamos o objeto todo simultaneamente, o que requer algumas estratégias que garantam a validade dessa análise (artigo 4, p. 202). Outro aspeto emergente diz respeito à necessidade de operar com modelos mentais *transformando imagens mentais noutras imagens mentais* (artigo 4, p. 206). De certa forma, este processo também surge noutras tarefas, embora de uma forma mais subtil. Neste caso, as formandas tinham de construir imagens mentais de novos sólidos para os quais não tinham representações externas (a não ser a do cubo truncado) e que desconheciam, o que se revelou exigente. Além disso, esta construção deveria ser feita recorrendo à *interpretação visual de informação*, fornecida no enunciado, a partir de duas fontes — a textual e a imagem, o que também levantou algumas dificuldades (artigo 4, p. 207). Finalmente, a necessidade de *integrar subconjuntos de objetos* (as novas faces do sólido gerado) ficou mais dificultada pelo facto de as formandas terem de operar apenas com imagens mentais, o que levou algumas a estruturarem os sólidos apenas localmente (artigo 4, p. 203).

Desta forma, respondendo às questões colocadas, os processos de raciocínio espacial envolvidos nas tarefas que recorreram a figuras tridimensionais não são diferentes dos mobilizados em figuras bidimensionais. Contudo, como afirma Gutiérrez (2017), a geometria 3D é a área da matemática mais exigente do ponto de vista da visualização, o que provavelmente decorre da maior dificuldade na *interpretação visual da informação* e da *observação e análise das imagens mentais* que, consequentemente, torna as operações mais exigentes. Quanto aos processos de raciocínio espacial que podem alterar o nível de dificuldade das tarefas, considero que a *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais*, sobretudo se não se apoiarem em representações externas, pode corresponder a processos mais exigentes, mas muito relevantes.

Termino este ponto abordando a especificidade do raciocínio espacial quando incide em famílias de figuras geométricas. Até agora, todas as ações a que me referi são igualmente válidas quando raciocinamos sobre objetos únicos, como foi o caso do hexágono na tarefa sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos. Para raciocinar, os indivíduos ativam a estruturação espacial dos objetos, baseada em modelos mentais que têm uma estrutura isomórfica à estrutura percecionada da situação (Battista, 2007). O mesmo objeto pode ser estruturado de diferentes formas pela mesma pessoa ou consoante a pessoa. Contudo, para poder justificar generalizações em famílias de figuras, será necessário generalizar o modelo mental dos objetos, ou seja, estruturar a família de objetos de forma análoga (artigo 4, p. 202). Desta forma, a justificação de generalizações sobre famílias de figuras geométricas implica um raciocínio duplo de encontrar as propriedades que sustentam a relação encontrada, com base numa estruturação espacial generalizada à família de objetos.

Questão 3. Quais os aspetos da experiência de formação que se revelaram mais significativos relativamente ao contributo para o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos futuros professores?

Nesta experiência de formação foram tomadas várias opções de acordo com os princípios de design identificados no capítulo 3, nomeadamente a utilização de uma abordagem exploratória, em que se destacam as tarefas utilizadas, o recurso a ferramentas digitais e materiais manipuláveis e a dinâmica das aulas. De seguida analiso os aspetos que se mostraram mais significativos para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, organizado nestes três tópicos.

As tarefas e sua sequenciação. Uma das características de algumas tarefas que se revelou mais significativa é a proposta de resoluções alternativas para a mesma questão, o que podemos identificar nas tarefas de definição (artigo 2) e de justificação de generalizações (artigo 3) e também na tarefa de classificação com a utilização de diagramas diferentes (artigo 1). Efetivamente, como já referi, a construção de definições não constituiu um fim em si mesmo, no sentido em que o objetivo não era apenas que as formandas conhecessem as definições para as figuras, mas que beneficiassem do processo de definir. Um dos benefícios é a possibilidade de estruturar as figuras de diferentes formas o que, provavelmente, não teria acontecido se não fossem pedidas definições alternativas, já que a tendência é para usar as propriedades "mais estruturantes" das figuras (artigo 2, p. 162). No caso da tarefa de classificação, a utilização de diferentes diagramas, salientando formas distintas de organização dos quadriláteros, constituiu um instrumento de favoreceu a compreensão da classificação das figuras e a sistematização de ideias (artigo 1, p. 119). Já para o caso da justificação, a utilização de diferentes estratégias, associadas ainda a representações distintas, parece apoiar a utilização de argumentos com base na estruturação geométrica (artigo 3, p. 185).

Esta ideia de diversificar abordagens para o mesmo problema vai ao encontro do que Yan, Mason e Hanna (2018) sugerem ao afirmar que "a variação cria oportunidades para os alunos fazerem conexões, integrarem conhecimento, e verem a estrutura em profundidade" (p. 13). Desta forma, a promoção de diferentes resoluções e representações parece contribuir significativamente para a flexibilidade do raciocínio que Stylianides e Stylianides (2010) referem como uma qualidade necessária aos professores, neste caso aplicada à geometria, o que implica a flexibilidade do raciocínio espacial que referi a propósito da questão anterior.

Outro aspeto a referir sobre as tarefas, diz respeito ao seu grau de dificuldade. Como sugerem ainda Stylianides e Stylianides (2010), as ideias a trabalhar devem ser fundamentais e difíceis de aprender, uma orientação que procurei equilibrar com a necessidade de promover a autoconfiança e a predisposição para fazer matemática (Serrazina, 2005). De facto, como alguns diálogos evidenciam (artigo 1, p. 122), particularmente a classificação hierárquica de figuras levantou várias dificuldades, mesmo a formandas que habitualmente revelam bons desempenhos, mas também se registaram dificuldades noutros processos. Uma característica que parece favorecer este equilíbrio é a existência de questões com diferentes níveis de dificuldade ou, mais uma vez, a proposta de resoluções diferentes para a mesma tarefa. Esta abordagem permitiu, por exemplo, que quase todas as formandas conseguissem formular pelo menos uma definição correta (artigo 2) ou justificar a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono a partir de uma estratégia (artigo 3), o que foi positivo para a sua aprendizagem e autoconfiança.

Finalmente, a sequenciação das tarefas. Como refere De Villiers (1994), em matemática construímos classificações descritivas (*a posteriori*) quando já conhecemos os objetos que pretendemos organizar, ao contrário das construtivas (*a priori*) em que se pretende introduzir novos conceitos. No caso dos futuros professores, quando entram nos programas de formação, já têm um conhecimento sobre quadriláteros e prismas, ainda que parcial, o que justificou a opção de iniciar a sequenciação das tarefas pela investigação das suas propriedades. Esta opção revelou-se importante pois, como referi anteriormente, os conhecimentos sobre as propriedades das figuras eram muito limitados às imagens prototípicas e/ou muito superficiais e não permitiriam dar sentido a classificações inclusivas. Quanto à construção de definições na fase seguinte, esta assentou na ideia que os dois processos são interdependentes (De Villiers et al., 2009). Contudo, os resultados do estudo mostram ainda que esta opção foi favorável à consolidação do processo de classificar, constituindo, no caso dos quadriláteros, uma espécie de "teste final" à aceitação das relações estabelecidas e uma forma de compreenderem a necessidade de coerência na organização dos conceitos.

As ferramentas digitais e materiais manipuláveis. No design desta unidade curricular, foram utilizados vários recursos, nomeadamente ferramentas digitais como o GeoGebra e o Poly[9], e materiais manipuláveis, tais como modelos de sólidos geométricos em madeira, Polydrons[10], cubos de encaixe, espelhos e miras. Neste ponto, referir-me-ei apenas aos materiais utilizados nas tarefas referidas nos artigos, nomeadamente o GeoGebra e os modelos de sólidos.

Começando pelo AGD, os resultados confirmam que este pode ser bastante favorável à investigação das propriedades invariantes das figuras e, consequentemente, ao estabelecimento de relações hierárquicas, tal como sugerem vários investigadores (Battista, 2008; de Villiers, 1994; Fujita, 2012). Efetivamente, a investigação sobre as propriedades dos quadriláteros (artigo 1) e a justificação da generalização para a soma

[9] *Software* interativo que permite visualizar várias classes de poliedros, nomeadamente, sólidos platónicos, prismas e antiprismas, sólidos de Jonhson…

[10] Peças encaixáveis com formas de polígonos regulares, vulgarmente conhecidas por este nome, correspondente a uma marca comercial.

das amplitudes dos ângulos internos de um polígono (precedida pela investigação com recurso ao GeoGebra, artigo 3) evidenciaram quatro das oito vantagens dos AGD referidas por King e Shattschneider (2003): (i) tirar partido do rigor das construções geométricas e das suas medições que conduz a um elevado grau de confiança nos resultados obtidos; (ii) promover a visualização; (iii) incentivar a exploração, investigação e descoberta conduzindo à formulação de questões e conjeturas, bem como o seu teste; e (iv) motivar para a demonstração, pois a evidência experimental oferece a convicção necessária para tal empreendimento.

Apesar das potencialidades referidas, a utilização do GeoGebra revelou igualmente desafios importantes. Por um lado, como afirma Battista (2008), é preciso compreender a forma como os indivíduos encaram as construções em AGD. De facto, mais do que a necessidade de aprender a utilizar as ferramentas do programa, é preciso que haja uma apropriação da lógica do seu funcionamento, o que implica essencialmente dois aspetos: assumir que quando arrastamos elementos de uma construção dinâmica, cada representação obtida é um exemplo da figura (no caso, cada quadrilátero estudado); compreender que as relações que se mantêm invariantes por arrastamento correspondem a propriedades da figura. Na experiência desenvolvida, o primeiro aspeto foi o que registou maiores dificuldades, uma vez que as formandas tendiam a ignorar as representações que não correspondiam às suas imagens prototípicas (artigo 1, p. 117). Neste sentido, este AGD constitui um recurso valioso na reconstrução de conceitos, mas é fundamental que a sua utilização seja apoiada pelo professor que deve favorecer uma adequada interpretação e apropriação daquele recurso, sob pena de não se tirar partido das suas potencialidades.

O objetivo de analisar um conjunto diversificado de elementos de uma classe foi também perseguido no trabalho com figuras do espaço tridimensional, mas desta vez usando modelos físicos. Esta medida foi fundamental por vários motivos. Como refere Gutiérrez (1996), frequentemente a única informação que os alunos têm sobre os sólidos é a partir das suas representações no plano, em particular dos manuais escolares. Por um lado, a informação que podemos extrair desta representação é apenas parcelar e, além do mais, requer uma correta interpretação, o que não acontece sempre, como foi o caso neste estudo (artigo 3, p. 181). Por outro lado, estas representações usam habitualmente o mesmo tipo de perspetiva e variam pouco as posições dos sólidos. Acontece que, como refere Yamanskaya (citado por Gutiérrez, 1996), a criação das imagens (mentais) dos objetos só é possível a partir da acumulação de diferentes representações que são necessárias à sua construção e, quanto mais rico e diverso for o repertório de representações, mais fácil é a construção de tais imagens, o que justifica a necessidade de manipulação dos modelos físicos.

Além da utilização de modelos físicos de sólidos, há ainda a considerar o interesse particular em construir tais modelos, como aconteceu na tarefa que envolveu sólidos platónicos (artigo 4). Como refere Guillén Soler (2004), a construção de modelos de sólidos conduz a uma análise primária dos seus elementos (vértices, arestas e faces), bem como da forma como se organizam localmente, e favorece uma contagem estruturada. Mais ainda, a construção destes modelos promove a perceção das parecenças e diferenças entre sólidos e a introdução das ideias que estão na "génese" das suas classes, uma ideia que é confirmada por este estudo. Em particular, a construção de sólidos platónicos, necessária à realização da tarefa sobre os sólidos platónicos truncados (artigo 4), ilustra bem esta ideia pois, por exemplo, para construir um icosaedro com facilidade é necessário ter em conta que o número de faces em torno de um vértice é sempre o mesmo — uma ideia que está na "génese" daquela família de poliedros e que é fundamental para a investigação proposta.

Contudo, se a utilização de modelos físicos é fundamental à construção de imagens mentais, como referi anteriormente, a experiência de ensino revelou ainda a importância de raciocinar sem o material, de forma a favorecer a realização de operações transformando imagens mentais noutras imagens mentais (artigo 4). De facto, a inexistência de modelos para os sólidos truncados pode ter conduzido as formandas a focarem uma atenção maior à forma como os sólidos se encontram estruturados de modo a encontrarem e justificarem as relações pedidas. Desta forma, o material manipulável deve dar o suporte necessário à construção e transformação de imagens mentais e, simultaneamente, permitir que essa atividade se mantenha apenas no plano mental de modo a desenvolver o raciocínio espacial.

Concluindo, quer o AGD quer os modelos físicos, embora com qualidades diferentes, direcionaram as formandas para as propriedades invariantes das figuras. Como sugerem Yan et al. (2018), isto favorece a imersão num ambiente que promove a formulação de conjeturas e sua alteração, bem como a expressão de ideias e intuições junto dos pares.

A dinâmica das aulas. Um outro aspeto que considero importante realçar relativamente à abordagem seguida, diz respeito às interações que foram geradas, quer no seio dos grupos, quer coletivamente. Os diálogos reproduzidos nos artigos revelam-nos algumas características dessas interações que influenciaram o raciocínio das formandas, entre as quais destaco quatro. O primeiro aspeto que sobressai como um fator promotor do raciocínio, diz respeito à negociação de significados, o que acontece quer entre mim e as formandas, quer entre estas. De facto, esta negociação incide sobre o significado de representações (artigo 1, p. 117; artigo 4, p. 200), sobre o significado de conceitos (artigo 2, p. 155) ou o significado de um enunciado (artigo 4, p. 207). O segundo aspeto muito relevante diz respeito à promoção do raciocínio espacial. Apesar de este tipo de raciocínio se apoiar sobretudo em imagens mentais às quais só conseguimos aceder por via de alguma representação externa (Gutiérrez, 1996), vários episódios mostram que as interações favoreceram o seu desenvolvimento, quer no apoio à construção de imagens mentais (artigo 4, p. 205), quer na partilha de diferentes formas de estruturar as figuras (artigo 4, p. 200), quer em situações em que procurei desvendar aspetos do raciocínio espacial das formandas de que não eram conscientes (artigo 2, p. 156 e 160). Um terceiro aspeto que também encontramos nos diálogos e que, de certa forma, é expectável, é o apoio que umas formandas dão a outras quando explicam um raciocínio a que as restantes ainda não acederam (artigo 3, p. 177), corrigem o raciocínio ou contra-argumentam (artigo 1, p. 119), ou ainda promovem a justificação investigando *o porquê* (artigo 4). No entanto, nalgumas situações observamos as formandas a irem além do que é esperado, desafiando as colegas e a própria professora com as suas conjeturas (artigo 2, p. 159-160). Finalmente, um quarto aspeto igualmente relevante é a promoção da reflexão. Como referi relativamente à classificação e definição de quadriláteros, a turma experienciou conflitos cognitivos entre as suas conceções e o conhecimento que procurei que construíssem. Para a resolução desses conflitos, foi importante a explicitação das dúvidas e dificuldades que conduziram a uma reflexão sobre o processo de aprendizagem (artigo 1, p. 122-123; artigo 2, p. 156).

Uma última nota sobre as interações entre as formandas. Como referem Yan et al. (2018), focar a atenção para o mesmo raciocínio é complexo, dado que este pode dirigir-se a diferentes aspetos — olhar para o todo ou para as partes, reconhecer propriedades das figuras ou construções, etc. — o que pode gerar um desencontro na comunicação. De facto, nesta experiência há alguns episódios que nos mostram que a comunicação entre pares não estava a ser eficaz, pelo menos momentaneamente (artigo 1, p. 126). De certa forma, algumas formandas usaram o contexto do grupo para dar voz ao seu raciocínio, especialmente aquelas que por natureza são mais espontâneas e interventivas. Este tipo de intervenção pode ter consequências positivas e negativas. No primeiro caso, porque a explicitação do pensamento pode ajudar à sua clarificação ou consciencialização (artigo 1, p. 117); no segundo, porque as formandas que têm mais dificuldades ou um pensamento divergente podem não encontrar espaço no grupo para prosseguir o seu próprio raciocínio (artigo 1, p. 119). Na verdade, a existência de um elemento que assuma o papel de par mais competente e que avance habitualmente com propostas pode ter o efeito que pretendemos contrariar no ensino exploratório — o do professor dirigir demasiado o raciocínio dos alunos. Assim, os episódios de interação entre as formandas, e entre mim e a turma, mostram a importância de momentos em que apresentam as suas ideias, dúvidas e dificuldades e lhes é permitido comentar, argumentar e até refletir em conjunto. Contudo, deve ser considerado igualmente espaço para desenvolver um trabalho individual, que pode anteceder a discussão em pequeno grupo, tal como foi feito para algumas tarefas (artigo 1).

6 Conclusão

Proposta final da conjetura de formação

Ao longo deste estudo procurei dar conta do design da experiência de formação, nomeadamente de algumas tarefas propostas, do ambiente de aprendizagem, do tipo de discurso que ocorreu e dos meios materiais disponíveis, como forma de chegar à compreensão de processos de aprendizagem inovadores (Cobb et al., 2003; Prediger et al., 2015). Estes elementos permitiram contribuir para o desenvolvimento de uma teoria local, nomeadamente através da construção de produtos curriculares e da proposta de uma conjetura e princípios de design. No que respeita aos produtos curriculares, destaca-se a publicação de um artigo numa revista profissional (Brunheira, 2017) que inclui a explicitação e reflexão sobre a trajetória de aprendizagem relativa ao estudo dos quadriláteros, com a disponibilização pública[11] de ficheiros em GeoGebra de construções dinâmicas. De seguida, abordo os princípios de design e reformulo a conjetura de formação.

Como é próprio das IBD, a construção da experiência de formação não partiu de um vazio teórico. Os princípios de design que orientaram a experiência foram formulados incorporando resultados teóricos e empíricos da investigação em educação matemática, não necessariamente na área da geometria, e com base na minha experiência anterior de lecionação da unidade curricular. Os resultados deste estudo não alteram os princípios delineados, mas sugerem alguns comentários finais a aspetos que se salientaram.

Em primeiro lugar, há considerar a relação entre o raciocínio espacial e o raciocínio geométrico que se liga com princípios sobre raciocínio (princípios 6 e 7). Fazendo uma analogia com as competências numéricas, assim como o cálculo flexível é uma componente fundamental do sentido de número, em que "os números são vistos como incluindo várias relações" (Brocardo, 2011, p. 6), também em geometria faz sentido falar de uma estruturação flexível das figuras, na qual o indivíduo *vê* vários elementos e relações entre si. Esta teia de relações constitui um modelo mental complexo que é mobilizado conforme a situação matemática assim o exija. Por exemplo, se quisermos justificar que a classe dos papagaios contém os quadrados, podemos mobilizar a definição "quadrilátero com dois pares de lados consecutivos congruentes"; se pretendermos construir um papagaio num AGD, uma forma mais prática será mobilizar a definição

[11] Acessíveis a partir de https://www.geogebra.org/search/perform/search/lina%20brunheira

“quadrilátero em que uma das diagonais é um eixo de simetria”; se quisermos construir um tradicional papagaio de papel, podemos usar a condição “diagonais perpendiculares em que uma bisseta a outra”.

Assim, ao contrário de Duval (1998) mas acompanhando Hershkowitz (1998), considero que o raciocínio geométrico deve estar alicerçado no raciocínio espacial. De certa forma, tal como Stylianides e Stylianides (2006) referem que o raciocínio em geral é uma atividade de *sense making,* considero que é o raciocínio espacial que fornece as principais ferramentas ao raciocínio geométrico e que lhe *atribui sentido*. Contudo, para que este constitua um suporte consistente é necessário valorizar algumas opções metodológicas que se salientam a partir deste estudo (ligadas aos princípios 1 a 5).

Uma das opções que sublinho diz respeito ao tipo de tarefas a realizar. O ensino exploratório destaca os problemas, investigações e explorações que, por natureza, favorecem o surgimento de diferentes resoluções e formas de representação — um fator que emergiu como promotor do raciocínio espacial. Além do tipo de tarefa, há a considerar os processos envolvidos. Neste estudo destaco os processos de classificar, definir e justificar, cuja relação com o raciocínio espacial discuti amplamente, pelo que realço agora outra potencialidade: o desenvolvimento de um conhecimento mais profundo sobre a matemática, nomeadamente pela compreensão do caráter relativo das definições e classificações, pelo entendimento da justificação como um processo que garante a validade do conhecimento através de argumentos explicativos e pela visão da matemática como um corpo de conhecimento coerente.

Uma outra opção que saliento, ainda associada ao ensino exploratório, diz respeito à discussão de ideias e negociação de significados, bem como a reflexão sobre a aprendizagem. Esta orientação não é nova e estende-se aos vários temas e níveis de escolaridade (NCTM, 1994). Neste estudo, a importância destes aspetos relativos à comunicação aparece muito ligada ao papel das representações que, em geometria, têm a sua especificidade devido ao seu caráter visual. De facto, as representações contêm várias informações cuja relevância depende, em boa parte, dos contextos matemáticos de que, frequentemente, os indivíduos não são conscientes ou não sabem descortinar. Por exemplo, uma representação de um triângulo ilustra a definição do conceito de altura de um triângulo. O que é relevante nessa representação? O tipo de triângulo? A sua posição? A relação do segmento que assinala a altura com o triângulo? Este fenómeno acarreta várias consequências que afetam o raciocínio geométrico e que observamos quando, por exemplo, os indivíduos induzem propriedades inexistentes nas figuras ao classificar ou definir (devido ao efeito protótipo) ou deduzem conclusões com base em argumentos inválidos quando justificam.

Desta forma, esta experiência sublinha a importância fundamental de que a aula dê lugar à discussão de ideias e negociação de significados, de modo a tornar explícitas as conceções que os futuros professores têm sobre as ideias matemáticas, algumas delas assentes em mal-entendidos. Na formação inicial, esta discussão deve ainda estender-se a aspetos didáticos, em que os formandos podem tirar partido da sua própria experiência para compreender as dificuldades que a aprendizagem da geometria pode desencadear e o alcance das abordagens metodológicas sugeridas pelo conhecimento didático.

Finalmente, uma observação sobre os recursos materiais que servem de apoio ao raciocínio geométrico. De uma maneira geral, e como referem Sarama e Clements (2016), os materiais manipuláveis, e até os virtuais, merecem referências muito positivas por parte dos professores, sobretudo dos primeiros anos. Esta valorização tem por base uma ideia generalizada de que se aprende "do concreto para o abstrato", muito embora as conceções sobre o que significa "concreto" possam ser bastante distintas. Já no âmbito da investigação, tem havido uma grande atenção sobre a utilização de recursos digitais, particularmente a utilização dos ambientes de geometria dinâmica. Contudo, como o trabalho com esta turma confirma, a esmagadora maioria dos futuros professores tem uma experiência escolar que resulta de um ensino direto, centrado na resolução de tarefas rotineiras, onde há pouco espaço para a exploração de ideias e o recurso a materiais estruturados para o ensino da geometria é praticamente inexistente. Este facto tem consequências para a aprendizagem e coloca a responsabilidade à formação inicial de superar ou minimizar esta lacuna, o que implica incorporar diferentes tipos de recursos na sua abordagem. Este estudo mostra que esta medida é fundamental, mas revela dois aspetos sensíveis aos quais é necessário atender. Em primeiro lugar, como referem ainda Sarama e Clements (2016), embora forneçam suporte e mediação, os materiais não "carregam" diretamente as ideias matemáticas subjacentes, pelo que é necessário estar atento ao entendimento que os indivíduos fazem dos recursos. Em segundo lugar, é tão importante saber como e quando usar os materiais, como perceber quando devemos limitar a sua utilização. Este é um aspeto importante para o raciocínio espacial e que pode depender de indivíduo para indivíduo, pelo que cabe ao professor estar atento às necessidades de cada um.

Finalizo assim com a reformulação da conjetura de formação:

> O desenvolvimento do raciocínio geométrico está alicerçado, em grande medida, no raciocínio espacial. Os processos de classificar, definir e justificar generalizações sobre figuras geométricas são influenciados pela qualidade deste raciocínio, mas são também promotores do seu desenvolvimento. Desta forma, a formação inicial de professores deve valorizar atividades que incluem aqueles processos, através de uma abordagem exploratória. Nesta abordagem devem destacar-se os seguintes aspetos: tarefas que favoreçam uma estruturação geométrica completa e flexível das figuras, nomeadamente através da exploração de diferentes resoluções; a discussão de ideias e a negociação de significados, bem como a reflexão sobre a aprendizagem; e utilização de recursos físicos e digitais que medeiem a construção de imagens e modelos mentais de objetos e relações, bem como as operações entre si.

Reflexão final

Num mundo perfeito, boa parte do trabalho que foi realizado nesta experiência de formação seria desnecessário. Os futuros professores já teriam vivido experiências centradas em fazer matemática, incluindo definir e classificar conceitos. Ter-se-iam envolvido em tarefas matemáticas de diferente natureza, para as quais escolheriam os recursos que entendessem melhor servir os seus propósitos. Teriam formulado conjeturas, algumas das quais abandonariam, outras justificariam e ainda outras ficariam em aberto. Os futuros professores não conheceriam apenas alguns nomes de figuras geométricas com base em imagens que viram representadas em manuais escolares, e seriam capazes de apreciar a beleza da geometria, reconhecendo formas e relações em vários contextos, geométricos ou do seu quotidiano. Teriam ainda a confiança e a predisposição para resolver tarefas mais complexas ou aprender autonomamente novos conceitos ou procedimentos. À formação inicial dos futuros professores caberia aprofundar esse conhecimento além dos limites designados pela formação escolar e, sobretudo, estabelecer pontes deste conhecimento com o conhecimento didático.

No entanto, a realidade não é a de um mundo perfeito, está até muito longe disso. Na verdade, como afirmam Ponte e Chapman (2008), a tarefa de formar professores pode ser vista como uma tarefa impossível, uma vez que pretende, num curto período de tempo, preparar jovens para assumirem uma tarefa profissional altamente complexa. Em particular, “pede-se aos novos professores que se envolvam em práticas compatíveis com as orientações de um currículo inovador mas que, de maneira geral, não correspondem à abordagem escolar estabelecida” (p. 256), o que é verdade, em particular, para aquela a que foram sujeitos. Esta constatação pode conduzir à tendência para “refazer” a formação matemática de acordo com as nossas perspetivas didáticas, resgatando os formandos do que consideramos ter sido uma formação escolar limitada. Contudo, é preciso ter em conta que, nem estes jovens são as mesmas pessoas que estavam na escola há uma década, nem têm os mesmos conhecimentos, nem objetivos — agora pretendem ser professores. Por estes motivos, é preciso encarar a sua formação matemática numa lógica de reconstrução, tendo ainda em conta que os seus percursos são bastante diversificados nesta área, e estabelecer pontes para a sua atividade futura.

O trabalho que apresentei discute uma experiência de formação que valoriza os processos de classificar, definir, generalizar e justificar através de uma abordagem exploratória. Durante esta experiência, voltámos a conceitos e procedimentos matemáticos que foram ou deveriam ter sido trabalhados na formação anterior dos futuros professores, onde a persecução de uma compreensão profunda é, na minha perspetiva, visível. No entanto, considero relevante voltar às ideias de Shulman (1986) e de Ball et al. (2008) e questionar se esta abordagem procurou ainda desenvolver um conhecimento matemático que é específico da profissão. A minha resposta é sim. De facto, frequentemente discutimos aspetos que considero pertencerem ao domínio exclusivo (ou quase exclusivo) das competências do professor. Por exemplo, por que razão uma definição pode ser mais adequada num dado contexto do que outra? Quais as consequências de favorecer algumas formas de representação em detrimento de outras? Quais as vantagens ou desvantagens de uma determinada forma de justificação? Estas questões foram sendo trabalhadas de modo integrado com o tratamento de conteúdos matemáticos e tendo em perspetiva o desenvolvimento do raciocínio geométrico, uma estratégia que avalio positivamente.

A experiência de formação em que assenta este estudo constitui uma forma possível de concretização dos princípios que enunciei. Não é a única, nem necessariamente a melhor. Pelo caminho, surgem várias dúvidas dos formandos, questões e conflitos cognitivos que nem sempre são fáceis de ultrapassar. Contudo, considero que qualquer outro caminho que não suscite estes problemas está a encobrir as suas dificuldades. Promover oportunidades para a (re)construção do seu conhecimento com compreensão é um caminho desafiante e trabalhoso, mas também mais profícuo, como os resultados ilustram. Profícuo do ponto de vista da aprendizagem dos formandos, sobre conteúdos ou capacidades, mas também do professor a quem se oferece uma janela sobre o conhecimento e o pensamento dos seus formandos.

Referências

Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153 -167). Lisboa: Projeto Matemática para Todos e Associação de Professores de Matemática.

Abrantes, P. (Ed.). (2001). Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais. *Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica*.

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2005). *A Matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM e SPCE.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241.

Atiyah, M. (1982). What is geometry? The 1982 Presidential Address. *The Mathematical Gazette*, *66*(437), 179-184.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-238). London: Hodder & Stoughton.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Greenwich, CN: Information Age.

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry microworld. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (vol. *2*, pp. 131-56). Charlotte: Information Age.

Battista, M. T. (2009). Highlights of research on learning school geometry. In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 91-108). Reston, VA: NCTM.

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(3), 258-292.

Branco, N. (2013). *O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores dos primeiros anos* (Dissertação de doutoramento não publicada, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa).

Brocardo, J. (2011). Uma linha de desenvolvimento do cálculo mental: começando no 1.º ano e acabando no 12.º ano. *Atas do ProfMat 2011*.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences, 2,* 141-178.

Brunheira, L. (2000). *O conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de actividades de investigação na aula de matemática* (Dissertação de mestrado). Lisboa: APM.

Brunheira, L. (2017). Uma trajetória de aprendizagem para a classificação e definição de quadriláteros. *Educação e Matemática, 144-145*, 33-37.

Brunheira, L., & Ponte, J. P. (2015). A influência das representações na classificação de quadriláteros em futuras professoras e educadoras. In L. Santos (Ed.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 195-208). Bragança: SPIEM.

Brunheira, L., & Ponte, J. P. (2017). A justificação de generalizações em geometria na formação inicial de professores. In H. Oliveira, L. Santos, A. Henriques, A. P. Canavarro, & J. P. Ponte (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 147-161). Lisboa: SPIEM.

Bussi, M. G. B., & Baccaglini-Frank, A. (2015). Geometry in early years: sowing seeds for a mathematical definition of squares and rectangles. *ZDM*, *47*(3), 391-405.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(4), 237-243.

Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: NCTM

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York, NY: National Council of Teachers of Mathematics/Macmillan.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 81-89.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of mathematics teacher education*, *14*(2), 133-148.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 481-503) New York, NY: Routledge.

Cochran-Smith, M. (2005). Teacher educators as researchers: Multiple perspectives. *Teaching and teacher education*, *21*(2), 219-225.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *The Journal of the learning sciences*, *13*(1), 15-42.

Conference Board for the Mathematical Sciences (CBMS) (2000). *Mathematical Education of Teachers Project*. Washington, DC: American Mathematical Society.

Conference Board for the Mathematical Sciences (CBMS) (2012). *Mathematical Education of Teachers II*. Washington, DC: American Mathematical Society.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative reading experiments through conjecture-driven research design. In A. E. Kelly & A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-266). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Craine, T. V., & Rubenstein, R. (Eds.) (2009). *Understanding geometry for a changing world*. Reston, VA: NCTM.

Cuoco, A. (2001). Mathematics for teaching. *American Mathematical Society, 48*(2), 168-174

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds), *Proceedings of the 22nd PME International Conference* (Vol. 2, pp. 248−255). Stellenbosh: University of Stellenbosch.

De Villiers, M., Govender, R., & Patterson, N. (2009). Defining in geometry. In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 189-203). Reston, VA: NCTM.

Design-Based Research Collective. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht/Boston: Kluwer.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24*(2), 139-162.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 60-72.

Fujita, T., & Jones, K. (2002), The bridge between practical and deductive geometry: Developing the "geometrical eye". In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings* *of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, 384-391). Norwich, UK.

Fujita, T., & Jones, K. (2006). Primary trainee teachers' understanding of basic geometrical figures in Scotland. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th PME International Conference* (Vol. 3, pp. 129-136). Prague, Czech Republic.

Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education, 9* (1), 3-20.

Gravemeijer, K. (2016). Design-Research-Based Curriculum Inovation, *Quadrante, 25*(2), 7-23.

Goldenberg, E. Paul, Cuoco, Albert, & Mark, J. (1998). A Role for Geometry in General Education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 3-44). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.*), Proceedings of the 20th PME International Conference, 1*, 3-19.

Gutiérrez, A. (2017). Enseñanza de la geometria a estudantes com talento matemático: teoria y práctica. In H. Oliveira, L. Santos, A. Henriques, A. P. Canavarro & J. P. Ponte (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 27-39). Lisboa: SPIEM.

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics education*, *22*(3), 237-251.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5-23.

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM, 39*, 73-78.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Greenwich, CT: Information Age.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry -- Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1), 61-76.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in Geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 29-37). Dordrecht/Boston: Kluwer.

Hershkowitz, R., Bruckheimer, M., & Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12, NCTM 1987 yearbook* (pp. 223-235). Reston, VA: NCTM.

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (2016). Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. *Diário da República, 2.ª série — N.º 52 — 15 de março de 2016*.

Johnston-Wilder, S., & Mason, J. (Eds.). (2005). *Developing thinking in geometry*. London: Sage.

Jones, K., Mooney, C., & Harries, T. (2002). Trainee primary teachers' knowledge of geometry for teaching. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 22*(2), 95-100.

Guillén Soler, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática, 16* (3), 103-125.

King, J. R., & Schattschneider, D. (2003). Tornar a geometria dinâmica. In E. Veloso & N. Candeias (Eds.), *Geometria dinâmica: Seleção de textos do livro Geometry Turned on!* (pp. 7-13). Lisboa: APM.

Laborde, C. (1992). Solving problems in computer-based geometry environments: The influence of the features of the software. *ZDM, 4,* 128-135.

Lannin, J.K., Elliott, R., & Ellis, A.B. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Lehrer, R., Jenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 137-168). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Leighton, J. P. (2004). Defining and describing reason. In J. P. Leighton & R. J. Sternberg (Eds.) *The nature of reasoning* (pp. 3-11). Cambridge: Cambridge University Press.

Leikin, R., & Zazkis, R. (2010). On the content-dependence of prospective teachers' knowledge: a case of exemplifying definitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(4), 451-466.

Lin, F.L., Yang, K.L., Lee, K.H., Tabach, M., & Stylianides, G. (2012a). Principles of task design for conjecturing and proving. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education, new ICMI study series 15* (pp. 305-325). Dordrecht: Springer.

Loureiro, C. (2004). Que formação matemática para os professores do 1. º ciclo e para os educadores de infância? In A. Borralho, C. Monteiro & R. Espadeirdo (Orgs.) *A Matemática na formação do professor* (pp. 89-123). Lisboa: SPCE.

Ma, L. (2009). *Saber e ensinar matemática elementar*. Lisboa: Gradiva.

Malkevich, J. (2009). What is geometry? In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 3-16). Reston, VA: NCTM.

Markman, E. M. (1989). *Categorization and naming in children*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Mata-Pereira, J., & da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 169-186.

Mariotti, M. A. (1992). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspects. *Structural Topology, 18*, 9-18.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 219-248.

Menezes, L., Serrazina, L., Fonseca, L., Ribeiro, A., Rodrigues, M. Vale, I., … Tempera, T. (2014). Conhecimento de geometria de alunos da licenciatura em Educação Básica. *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga.

Ministério da Educação e Ciência (MEC). (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática. Ensino Básico*.

Ministério de Educação — Direção Geral de Educação (ME — DGE) (2018). Aprendizagens Essenciais. Matemática. Consultado em http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Ministério da Educação — Direção Geral do Ensino Básico e Secundário (ME — DGEBS) (1991). Programa de Matemática. Ensino Básico. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children views of the difference between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics, 42*(2), 179-196.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE. (Tradução portuguesa da edição original de 1989).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). Princípios e *Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa da edição original de 2000).

Niss, M. (1998). Teacher qualifications and the education of teachers. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 297-318). Dordrecht/Boston: Kluwer.

Okazaki, M., & Fujita, T. (2007). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Atas do PME 31* (Vol. 4, pp. 41-48). Seoul, Korea.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática, 100,*3-9.

Plomp, T. (2010). Educational Design Research: an Introduction. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), *Proceedings of the seminar An introduction to educational design research* (pp. 9-35). Shangai, China.

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 223-261) New York, NY: Routledge.

Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação/Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM, 47*(6), 877-891.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational studies in mathematics,23*(6), 595-610.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense.

Russel, S. J. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. V. Stiff, & F. R. Curcio (Eds.) *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 1-12). Reston: NCTM.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2016). Physical and virtual manipulatives: what is "concrete"? In P. S. Moyer-Packenham (Ed.) International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives (pp. 71-93). Cham: Springer.

Serrazina, L. (2005). A formação para o ensino da Matemática nos primeiros anos: que perspetivas? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação*

Matemática: caminhos e encruzilhadas. Encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes (pp. 305-316). Lisboa: APM.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics education*, *48*(5), 691-719.

Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação (2014). Carta ética. Consultado em http://www.spce.org.pt/PDF/CARTAETICA.pdf

Steele, M. D. (2013). Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(4), 245-268.

Steen, L. A. (1999). Twenty Questions about Mathematical Reasoning. In L. V. Stiff, & F. R. Curcio (Eds.) *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 270-285). Reston, Va: NCTM.

Stemberger, T., & Cencic, M. (2014). Design-based research in an educational research context. *Journal of Contemporary Educational Studies 65*(1), 62-75.

Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 289-321.

Stylianides, A.J., Bieda, K. N., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In A. Gutiérrez, G.C. Leder & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315-351). Rotherham: Sense.

Stylianides, A. J. & Stylianides, G. J. (2006). Content knowledge for mathematics teaching: the case of reasoning and proving. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th PME International Conference* (Vol. 5, pp. 201-208). Prague, Czech Republic.

Stylianides, G.J. & Stylianides, A.J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*, 314-352.

Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2010). Mathematics for teaching: A form of applied mathematics. *Teaching and Teacher Education*, *26*(2), 161-172.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y. H. (2011). Cognitive development of proof. In G. Hanna & M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 13-49). Springer, Dordrecht.

Tempera, T. (2010). *A geometria na formação inicial de professores: Contributos para a caracterização do conhecimento dos estudantes* (Dissertação de mestrado não publicada, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa).

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais.* Lisboa: IIE.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,14*(3), 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Viseu, F., Menezes, L., & Almeida, J. (2013). Conhecimento de Geometria e perspetivas de professores do 1.º ciclo do ensino básico1 sobre o seu ensino. *Revemat*, 8(1), 156-178.

Watson, A. & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4), 205-215.

Winicki-Landman, G. & Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions I. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 17-21.

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 22-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Yan, X., Mason, J., & Hanna, G. (2018). Probing interactions in exploratory teaching: a case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 1-16.

Yu, P., Barrett, J. & Presmeg, N. (2009). Prototypes and categorical reasoning: A Perspective to explain how children learn about interactive geometry objects. In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 109-125). Reston, VA: NCTM.

Zaslavsky, O. & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(4), 317-346.

Zazkis, R. & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131-148.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

ANEXOS

Anexo A. Artigo 1

<u>Versão dos autores</u>

From the classification of quadrilaterals to the classification of prisms: An experiment with prospective teachers

Lina Brunheira

ESELX — Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Abstract. This article reports a research in the context of a K-6 prospective teacher education experiment developed in a geometry course in the 2nd year of their preparation program. This course included the study of the classification of quadrilaterals and prisms. The research is guided by the following question: how does the learning of hierarchical classification of geometric figures evolve from a teacher education experiment that includes the classification of quadrilaterals and prisms and follows an exploratory approach to teaching? Data was collected from audio and video records from the lessons and from the participants' written reports about the classification of quadrilaterals and prisms. The results show that, in the first stage that focused on quadrilaterals, the participants' difficulties in classifying derived mainly from their inexperience with the process of classifying geometrical objects and from their strong conceptualization of some quadrilaterals, very attached to prototypical images. In the second stage, the classification of prisms showed a positive and significant evolution, with a lower influence of prototypical images and a higher understanding about the classification process and the identification of hierarchical relationships among "close" and "distant" figures. However, the final evaluation test showed that the prospective teachers still had misunderstandings, most often related to the interpretation of the discourse and logical reasoning than to limited figural concepts.

Keywords: classification, quadrilaterals, prisms, geometric reasoning, prospective teacher education.

1. Introduction

In usual mathematics teaching, the content is taught to students according to a pre-organized structure, in which all the concepts and respective definitions are preestablished by teachers, based on textbook and curricula. This way of presenting concepts to students is not productive from a didactic perspective, if we assume that the student must play a major role in the construction of their knowledge, nor corresponds to the way concepts are developed in mathematics. This system, where the students do not have opportunities to organize their spatial experiences, has been criticised for several decades by educators and mathematicians, notably by Freudenthal (1973) who underlined the importance of activities in which the students learn to organize a subject (and thus learn what organizing is), learn to conceptualize (and what conceptualization is), and learn to define (and what a definition is).

Among the various activities to be valued in geometry teaching, lies the classification of figures, referred by many researchers (e.g., De Villiers, 1994; Mariotti & Fischbein, 1997) and suggested by the most recent curricular guidelines for mathematics teaching in preschool and elementary and middle school (NCTM, 2000). However, research carried out in different countries has showed several difficulties that affect students of all levels of education, as well as in prospective teachers. In general, studies on the classification of quadrilaterals show that geometric reasoning is frequently affected by mental images of the figures, lacking flexibility in the majority of times (prototype effect), by difficulties in deductive reasoning and by misunderstanding of the classification process itself (Brunheira & Ponte, 2015; De Villiers, 1994; Fujita, 2012; Fujita & Jones, 2007; Monaghan, 2000; Okazaki & Fujita, 2007; Tempera, 2010). Nonetheless, little is known about the classification of solids, as well as the progression on learning to classify. Thereby, it is necessary that research focuses on the learning of these topics and overcomes the lack of knowledge about teachers and prospective teachers in geometry, referred by some researchers (Chapman, 2013; Clements & Sarama, 2011; Steele, 2013). In addition, research should develop productive strategies to diminish the diagnosed difficulties, supporting prospective teachers in the development of geometric reasoning. Addressing this issue, we conducted an experiment in a geometry course of a degree in basic education[12]. Our investigation addresses the following research question: how does the learning of hierarchical classification of geometric figures evolve from a teacher education experiment that includes the classification of quadrilaterals and prisms and follows an exploratory approach to teaching?

[12] In Portugal, K-6 prospective teachers take a bachelor's degree in Basic Education for three years and then a master's degree targeted to the level and subject areas in which they will be teaching.

2. Theoretical framework and literature review

2.1. The classification process in geometry

According to Markman (1989), the systematic organization of concepts into categories is a major intellectual achievement of human conceptualization. As this psychologist states, from an early age, we are capable of recognizing some individual objects as individuals — babies do not see their family members as any other person or their toys as any other toys. By 18 months to 2 years of age, children become capable of distinguishing stuffed animals from real animals and name them. This type of simple categorization, in which an object belongs to one or another group, is the first problem of this nature that children face. The second problem is the organization of concepts in inclusive classes, establishing a hierarchical relationship among them. Organized like this, a categorized object in a certain hierarchical level has all the properties of the objects belonging to the classes in upper hierarchical levels, and this has multiple advantages for the production and organization of knowledge.

Therefore, we may assume that the classification process is inherent to our human condition and common to several everyday activities, as well as to all fields of knowledge. In the case of mathematics, the classification process is most relevant. Mariotti and Fischbein (1997) state in the following way what means to classify:

> A classification task consists of stating an equivalence among similar but figurally different objects, towards a generalisation. That means overcoming the particular case and consider this particular case as an instance of a general class. In other terms, the process of classification consists of identifying pertinent common properties, which determine a category. (p. 244)

In mathematics, we may consider several types of classifications. Regarding quadrilaterals, De Villiers (1994) refers that figures may be organized using partition classifications or hierarchical classifications. In either case, we can distinguish descriptive classifications (*a posteriori*) from constructive classifications (*a priori*). We undertake *a posteriori* classifications when we have already studied the properties of figures and we have organized objects regarding those properties. In *a priori* classifications, we begin with an object and we build all the relations based on generalization or specialization processes. For example, beginning with a particular quadrilateral — the square — we built other more general concepts by "erasing" some of the properties or by replacing some properties with more general ones; otherwise, we can begin with a more general concept, like the parallelogram, and add properties or replace some properties with more specific ones. The main function of *a priori* classification is the construction of new concepts.

Regarding partition and hierarchical classifications, De Villiers (1994) points that the term “hierarchical classification” designates a type of “classification of a set of concepts in such a manner that the more particular concepts form subsets of the more general concepts” (p. 11); on the other hand, in partition classifications “the various subsets of concepts are considered to be disjoint from one another” (p. 11). Both concepts correspond to the two ways of classification aforementioned by Markman (1989) — partition classifications corresponds to those we spontaneously construct in the beginning of our lives and the hierarchical ones those demanding a greater maturity. However, as this author notes, partition classifications frequently have some underlying hierarchical organization.

As De Villiers (1994) states, there is a close relation between the definition and the classification of objects. For instance, the definition “a quadrilateral having at least one pair of opposite sides parallel” for trapezia generates a hierarchical classification in which the parallelogram is the particular case of a trapezium; however, if the definition states that there is only one pair of opposite sides parallel, we have a partition classification, with the parallelogram belonging to a disjoint set of the trapezium. This relationship between classification and definition is the basis of some advantages that the author attributes to the hierarchical classification, such as leading to a greater economy in the formulation of definitions and theorems, and simplifying the deduction of properties to more specific concepts. Despite the advantages of hierarchical classifications, partition classifications are not wrong — many are quite important, as the classification of polygons on convex and concave.

2.2. Learning to classify geometric figures hierarchically

Even though the classification process is inherent to our human condition and is present in many activities, there are several factors that make it considerably complex. According to Mariotti and Fischbein (1997), in geometry, theoretical classifications frequently resort to structural criteria which are not immediately clear and “are far from those perceptual criteria to which we are used to refer in our spontaneous activity of classification” (p. 244). For instance, mathematically it does not make sense to put rectangles and rectangular parallelepipeds into the same category, but it is natural that individuals consider them to have the “same shape”. In addition, by declaring an equivalence among objects of the same category, we attend to the similarities that the objects have among them, but we need to ignore their differences, which contradicts our natural tendency to differentiate objects. Individuals tend to add unneeded or false attributes to figures based on a prototype, a behaviour that Hershkowitz (1989) characterizes as follows: prototypical judgement type 1 — "the prototypical example is used as the frame of reference and visual judgment is applied to other instances" (p. 74); prototypical judgement type 2 — "the prototypical example is used as the frame of reference but subject bases his judgement on the prototype self attributes and tries to impose them on other concept examples" (p. 74). In both cases, the prototypical example is considered "**the** representative concept" and the other cases are judged by their "distance" from this representative case. Opposed to these judgements, the desirable behaviour is to develop an analytical judgement (type 3) where "the critical attributes are used as a frame of reference in the formation of geometrical concepts" (p. 74).

The difficulty to classify tends to be bigger when we are dealing with hierarchical classifications. In addition to the abovementioned aspects, the establishment of hierarchical classifications involves the comprehension of an important set of understandings, systematized by Markman (1989), which we illustrate using quadrilaterals:

- We may apply two labels to the same figure;
- Transitivity relation between concepts — for example, if a square is a rhombi and if a rhombi is a parallelogram, then a square is a parallelogram;
- Asymmetry of the relations between quadrilaterals — for instance, all rectangles are parallelograms, but not all parallelograms are rectangles;
- Asymmetry of the properties between quadrilaterals — for example, the properties of the rectangles are still properties of the squares, but not all properties of the squares are properties of the rectangles.

The last aspect corresponds to "the opposing direction inclusion relationship", an expression used by Hershkowitz, Bruckheimer and Vinner (1987) to underline a potentially conflicting idea: the set of attributes of a rectangle is a subset of the attributes of a square, but a square is a rectangle (meaning that the set of squares is a subset of rectangles).

Several studies about the classification of figures draw on the Van Hiele levels. According with Battista's formulation (2009), at level 1 (visual-holistic reasoning), figures are recognized by their appearance as visual wholes; the language is mainly influenced by prototypes and by the orientation of figures. At level 2 (descriptive-analytic reasoning), students attend to, conceptualize and specify shapes by describing their parts and relations among parts, initially, using informal language and progressively incorporating formal geometric concepts, as they are taught in the curricula. In the end, they only use formal concepts, but cannot relate properties or understand that a subset of properties implies another. At level 3 (relational-inferential reasoning), individuals infer relations among properties of figures and make simple logic deductions; it is at this level that they understand the hierarchical classification of figures, although they may resist accepting some relations in an initial phase at this level. At level 4 (formal deductive proof), students completely understand logic deduction and demonstrate; lastly, at level 5 (rigor), students use, understand and analyse axiomatic systems.

Still in the tradition of the research developed based on the theory of Van Hiele, other researchers adapted the levels to other topics. One of those adaptations was proposed by Gutiérrez, Jaime and Fortuny (1991) and concerns three-dimensional figures, while keeping coherence with the original formulation to plane figures: at level 1 (recognition), solids are visually identified in a holistic way, without reference to their components or properties; at level 2 (analysis), students identify components and properties of solids, which are described informally, but still do not logically relate nor classify families of solids; at level 3 (informal deduction), students can classify families of solids and understand their definitions, as well as provide informal arguments for their deductions; at level 4 (formal deduction), students understand the role of different elements in an axiomatic system and produce formal proofs. In this adaptation of the Van Hiele levels, the researchers put the classification of solids at level 3, the same level other authors consider for the classification of plane figures (Battista, 2009; Fujita & Jones, 2007).

The conclusion that only at Van Hiele level 3 people may dominate the hierarchical classification of figures may be explained by using Hershkowitz' s (1989) categorization of the reasoning that students use to analyse figures. At Van Hiele level 1, students recognise figures by appearance, so they use the prototype example as reference and the judgement is affected by the visual attributes of prototypes, which they try to impose on other figures. For instance, students may argue that a square is not a parallelogram because is not slanted (prototypical judgement type 1). At level 2, students conceptualize figures and relations between their parts, but they do not relate properties, so they may accept that a square is a parallelogram because it has opposite sides parallel (analytical judgment), but they also may argue that a square is not a parallelogram because it does not have two acute and two obtuse angles (prototypical judgement type 2). At level 3, students infer relations among figures and make simple logic deductions. In this sense, students may recognise that if a square has four congruent sides, the opposite sides are congruent, so it is also a parallelogram (analytical judgment).

According to Hershkowitz (1989), prototypical judgment type 2 might represent the transition between the first two Van Hiele levels, which contradicts the idea that these levels are discrete. Moreover, her research shows that behaviour change from one concept to another and that it "differs with experience and knowledge within a given concept" (p. 75). Also Gutiérrez et al. (1991), in their study, point that the most significant aspect highlighted is the possibility to situate the same student at two different levels, which is "probably depending on the difficulty of the problem" (p. 250). Such result does not question the hierarchical structure of these levels, but reminds that "people do not behave in a simple, linear manner, which the assignment of one single level would lead us to expect" (p. 250).

2.3. The hierarchical classification of figures and the use of DGE

The hierarchical classification of geometric figures requires the mastery of many aspects previously mentioned, which have been identified as problematic in empirical studies involving students, teachers and prospective teachers. Some studies report difficulties related to the use of the prototypical examples (e.g., Erdogan & Dur, 2014; Fujita & Jones, 2007; Monaghan, 2000), which might reflect in a different manner depending on the individual and the figure (Okazaki & Fujita, 2007), even when individuals know a correct definition (Fujita, 2012). Furthermore, De Villiers (1994) refers that many difficulties frequently arise from misunderstandings about the classification process itself and not necessarily from a lack of knowledge of the properties of the figures.

The prototypical effect, most referred in these studies, is often related to static mental images of shapes. For instance, the work of Monaghan (2000) suggests that "students use terms such as diagonal, vertical, and horizontal, as fixed and defining attributes of specific shapes rather than as descriptors of particular representations of individual cases" (p. 190), showing a static image of the concept. This phenomenon relates to the roles that diagrams play in geometric reasoning. As Battista (2008a) states, on one hand, particular instances of diagrams and objects contribute to the formation of geometric conceptualizations because geometric concepts derived from the analysis of those instances, i.e., they are usually abstractions of particular instances. On the other hand, diagrams and objects can be used to represent formal geometric concepts. So, for instance, a set of representations of the concept of rectangle contributes to the formation of this concept, but the concept may be represented by a single case. Therefore, students often "attribute irrelevant characteristics of a diagram to the geometric concept it is intended to represent" (Battista, 2008a, p. 347).

Dynamic geometric environments (DGEs) play an important role in dealing with this problem. As Battista (2008a) clams, research on DGEs presents two major perspectives on "draggable drawings": (i) they are seen as generating numerous examples, which might remedy the difficulties that students face when they encounter a restricted lack of examples of a concept; (ii) geometrical relationships can be visualized as invariants when the draggable figure moves. Some empirical studies reflect these perspectives, but also unveil issues to consider and questions for further research. Next, we present three studies, involving children of different ages and grades, which constitute examples of these perspectives.

Sinclair and Moss (2012) conducted a study among 4-5 year-old children working with Geometer's Sketchpad on a 30-min lesson during which the children observed, described, created and transformed triangles of different sizes, proportions, and orientations. The researchers did not intend to classify triangles, only that the children would broaden their restricted range of three-sided polygons recognized as triangles. In the beginning of the experience, the children agreed that, in order to construct a triangle, "you do three sides and connect them", but some of them did not recognise long and skinny examples as triangles, or suggested that some of them were "upside down". Throughout the intervention, the diversity of three-sided polygons they were prepared to call "triangle" grew substantially, as the possibility of manipulating the figures encouraged the children to abandon some restrictions that they had formerly imposed. However, considering the short amount of time and experience, the researchers question if, once children find themselves in a static environment, they would maintain their thinking.

Battista (2008b) also developed a study based on an intervention with 5th graders using Shape Makers microworld, a special add-on to the DGE Geometer's Skechtpad. This DGE allowed dragging quadrilaterals and triangles maintaining their properties, as the students worked on a sequence of instructional tasks. Some of the tasks focused on classification issues. For instance, students were asked to use the seven Shape Makers (square, rectangle, trapezoid, kite, rhombus, parallelogram and quadrilateral) to reproduce a static drawing of a clown consisting of three squares, two oblique parallelograms, a rectangle and a concave kite. To do so, they had to transform the Shape Makers to overlap those quadrilaterals (for example, the Parallelogram Maker had to overlap a rectangle), which promotes the idea that some quadrilaterals are particular cases of others, i.e., the hierarchical classification of quadrilaterals. Battista (2008b) suggests that "investigating shapes through Shaper Maker transformations makes the essence of their properties more psychologically salient to students than simply comparing examples of shapes as is done in traditional instruction" (p. 152). However, the author alerts that the conceptualization of the movement constrains requires much guidance, reflection and experimentation so that "students' conceptualizations become positively stated, not has what a Shape Maker cannot do, but as what regularities or invariants hold for Shape Makers movements" (p. 149).

Kaur (2015) built on the work of Battista (2008b) and designed a project to work with younger children (ages 7-8, grades 2-3) in order to use the potential of DGEs to develop an understanding of, and reasoning about, the properties and behaviours of different triangles, including the classification of an equilateral triangle as an isosceles triangle. The children dragged the sides and vertices of the triangles, thus generating many non-prototypical examples. At the beginning they used mostly action verbs ("go", "moves", "staying", "paralysed"…) showing the tendency to reason in terms of motion when comparing different types of triangles. During the discussions, "the children's routines moved from informal dynamic descriptions to formal geometric properties as well as from particular to more general discourse about different types of triangles" (p. 407). From the point of view of classification, the initial colour-coding of the triangles (different colours for isosceles and equilateral), while useful as an initial means of communication, may have worked against the idea of inclusive relations.

Returning to general research on classification of geometric figures, although there is a significant number of studies involving students of different ages, teachers and prospective teachers, the results of research concern, in fact, almost totally, the hierarchical classification of quadrilaterals and, in a few cases, triangles. For example, the recent revision of studies presented within the scope of PME (Jones & Tzekaki, 2016) from 2006 to 2015, includes a section referring to the hierarchical relations involving solely those polygons. Also, the review of published studies since 2008 in articles, proceedings and books, prepared by Sinclair et al. (2016) in an ICMI13 survey, includes an item about the definitions of triangles and quadrilaterals and consequent analysis of their classifications, but with no reference to other types of figures.

Therefore, there is a significant body of knowledge about the classification of quadrilaterals that points to common obstacles, namely the influence of prototypical images that tend to subdue the reasoning about geometric figures. This fact is considered problematic as, like Clements and Sarama (2011) refer, "such limited education, from their own early years on, leaves teachers under-prepared for teaching geometry" (2011, p. 136), whether at preschool or at more advanced stages of schooling.

2.4. Prospective elementary teacher education in geometry

For the National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] the knowledge necessary for teaching includes "the content and discourse of mathematics, including mathematical concepts and procedures and the connections among them; multiple representations of mathematical concepts and procedures; ways to reason mathematically, solve problems, and communicate mathematics effectively at different levels of formality" (NCTM, 1991, p. 132). This perspective is coherent with the idea advocated by Ma (1999) that teachers need a profound understanding of fundamental mathematics. Regarding geometry, the NCTM (1991) states that all teachers should understand how geometry is used to describe the world we live in and how it is used to solve concrete problems; analyse a diverse set of two and three dimensional figures; use synthetic geometry, coordinates and transformations; improve their skills in producing arguments, justifications and privilege spatial visualization.

The education of teachers concerns also the ways they are taught. Regarding the results of several studies about prospective teachers' knowledge of mathematics, Watson and Mason (2007) propose that courses should prompt prospective teachers to engage in mathematical thinking through working on suitable mathematical tasks, develop their understanding about the features and power of those tasks, reflect on the experience of doing mathematical tasks individually or with others, challenge approaches dominated by procedures which depend on rote memorization, and observe and listen to learners. These orientations are also consistent with ideas underlined by other researchers, according to whom prospective teachers should learn using the same methods that are recommended they should use with students (Ponte & Chapman, 2008) and also that connecting subject matter knowledge and pedagogy is a promising strategy to develop both kinds of knowledge and their integration, a critical to teach well (Ball, 2000).

The experiment that we present follows this perspective, as we focus on prospective teachers' learning as they work on exploratory tasks and reflect on their own learning (Ponte, 2005). Exploratory tasks demand learners to engage actively in the construction of their knowledge by solving tasks where there is no clear solving method, as it is the case of problems. Such is also the case of investigations, in which learners are challenged to ask questions or extend the purpose of the task. They need to interpret the given information, develop strategies, represent and communicate their solutions. This promotes their understanding of representations, concepts, and procedures, and also develops the ability to argue about ideas, as they communicate such ideas to others. Work on exploratory tasks develops usually in three phases: (i) presenting and interpreting the task; (ii) carrying out the task individually, in pairs, or in small groups; and (iii) presenting and discussing results in whole class, ending with a final synthesis.

3. Research methodology

This paper addresses an investigation with an intervention, in order to change practices and enhance prospective teachers' preparation in geometry, particularly the process of classifying geometric figures, where we found difficulties in previous experiences also reported in Portuguese studies (e.g., Brunheira & Ponte, 2015; Tempera, 2010). The research focus is on learning in context, beginning from the conception of strategies and teaching tools, following a design-based research as methodology, in the form of a prospective teacher experiment (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003) in which the teacher also plays the role of researcher. The design of the experiment is guided by the following conjecture: the classification process of geometric figures i) promotes knowledge about properties of geometric figures; ii) promotes the understanding of the classification process and of the concept of class; and iii) promotes reasoning.

The experiment took place in a class of 25 prospective teachers that attended a geometry course in the second year of a bachelor's degree in basic education. This course lasts 15 weeks, with two lessons of 2h 15min per week, making a total of 67h 30min of classroom work. We designed and implemented two sets of lessons focusing on the hierarchical classification of figures. The first set concerned the classification of quadrilaterals and the second, two months later, the classification of prisms. In both cases, the class produced *a posteriori* classifications, as this work was preceded by the analysis of some of the properties of the figures. Table 1 presents all the tasks related to the process of classifying geometric figures, indicating those reported in this article (with an asterisk), the week in which they were implemented and the time spent on each. From the methodological point of view, the lessons followed an exploratory approach, beginning with an introduction of the task by the teacher, followed by work in small groups, and finishing with a whole class discussion (Ponte, 2005). Although they generally worked in groups, in several occasions the participants were encouraged initially to find an individual solution, discussing it within the group and, at the end, in a whole class discussion.

Table 1

General plan of the intervention

Week	Task	Time spent
1	Diagnostic test*; four individual interviews*	2h
2	Investigation of the quadrilaterals' properties (using GeoGebra)*	4h30
3	Classification of quadrilaterals*	2h15
3	Definition of quadrilaterals (construction of inclusive definitions)	2h15
12	Investigation of prisms' properties (using manipulative solids)	2h15
12	Classification of prisms*; Definition of parallelepiped	2h15
15	Final evaluation test*	2h15

We present quantitative data to give a general idea about the class performance, but also qualitative data from participants' records of tasks or from dialogues among them that illustrate the reasoning underlying the solutions. All dialogues were collected from the same group (with Tita, Helena, Fernanda and Cristina), the same participants we interviewed in the beginning of the course. This group was chosen because they had different backgrounds concerning mathematics, different attitudes concerning their confidence towards the learning of mathematics and different expectations relating their professional career (as kindergarten teachers, primary teachers or middle school mathematics teachers). These data were collected from audio and video records of the lessons, as well as from the participants' records of tasks.

To analyse the way prospective teachers classify quadrilaterals and prisms, we use a model by Fujita (2012) for the levels of understanding of the classification of quadrilaterals. This researcher assumes that the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals develops through certain levels by considering Van Hiele's visual, analytical, informal deductive and deductive levels. The model also takes into account the theory of figural concepts by Fischbein (1993), who suggests that geometric figures are mental entities controlled by a figural component and a conceptual component and, given the importance of the prototype phenomena, incorporates Hershkowitz's (1989) types of prototypical judgment in order to characterize students reasoning when they add unnecessary or untrue attributes to figures. Table 2 illustrates Fujita's (2012) framework for the parallelograms class but, analogously, we may consider similar frameworks for the families of trapezia or kites. For the classes of rectangles or rhombi, the framework has one less category (partial prototypical classification) since the only type of quadrilateral belonging to those classes is the square. In our study, we follow Fujita's categories of analysis but we extended it to the classification of prisms, using the analogy to the three-dimensional space.

Table 2

Levels of understanding of the inclusive relations in the class of quadrilaterals and prisms (adapted from Fujita, 2012)

Level	Description
Hierarchical classification	Learners can accept squares, rectangles and rhombi [cubes, rectangular parallelepipeds, parallelepipeds and quadrangular prisms] are also parallelograms [prisms]. "The opposing direction inclusion relationship" of definitions and attributes is understood. Their judgement is likely to be analytical (type 3, based on critical attributes).
Partial prototypical classification	Learners have begun to extend their figural concepts, so they accept some relationships but not others. For example, they accept that rhombi are also parallelograms [parallelepipeds are prisms] but not squares and rectangles [cubes]. Their judgement is likely prototypical type 2 (based on attributes).
Prototypical classification	Learners who have limited personal figural concepts. Their judgement is either prototypical type 1 (based on visual appearance) or 2 (based on attributes).
0	Learners do not have basic knowledge of parallelograms [prisms].

At the hierarchical level, the analysis an individual does of the figures is based on critical attributes, disregarding attributes such as acute and obtuse angles that only oblique parallelograms present. Individuals also realize that, although the critical attributes of parallelograms are a subset of the critical attributes of rectangles, the set of rectangles is a subset of the parallelograms, which requires logical reasoning. At the partial prototypical classification level and the prototypical classification level, individuals judge figures by their "distance" to the prototypical image. So, if they began to extend their figural concepts, they might accept some quadrilaterals as parallelograms, particularly if they have more common critical attributes. However, they still consider attributes that are noncritical, such as different consecutive sides, which prevent a complete hierarchical classification. In addition, if their figural concepts are very limited, they do not relate parallelograms to other quadrilaterals because they focus on noncritical attributes that may be verbalized or associated with the visual appearance of the prototype. Finally, the last level concerns individuals that do not identify simple attributes, so they do not have the minimal knowledge, even for prototypes.[13]

4. Results

4.1. Classifying quadrilaterals

In the first lesson, the class did a multiple-choice diagnostic test, which included a question about the inclusive relation between squares and rectangles. The results showed that only 44% consider true the statement "all squares are rectangles" and acknowledged that not all rectangles are squares. Additionally, in an interview to four of the participants that answered correctly to this question (Tita, Helena, Fernanda and Cristina), we realized that only two (Helena and Cristina) understood the reason why a square is a rectangle, answering "because it has four right angles". These data confirm that there are some participants who know something about this relation, but only as a fact. No other hierarchical relations were acknowledged, which was no surprise because the Portuguese curriculum did not include this subject at the time the participants were at school.

The work on the hierarchical classification of quadrilaterals begun with an investigation about their properties, using GeoGebra and dynamic pre-constructed

[13] An interrater reliability study done independently by the two authors showed 94% of agreement. The few cases of disagreement concerned responses with contradictory or insufficient information.

sketches of squares, rectangles, parallelograms, rhombi, trapezia and kites[14]. The prospective teachers were supposed to recognise each figure shown in the screen as a representative of its class and to study the invariant properties related to sides, angles, diagonals and axis of symmetry, making it possible to indicate the critical attributes of each class. Although we did not ask for relationships between quadrilaterals, this task intended that the prospective teachers begun to expand the figural concepts, thus, understanding that some quadrilaterals are particular cases of others. Simultaneously, this activity gave us more elements about the way participants conceptualized quadrilaterals in the beginning of the course.

The participants had no previous experience using a DGE which strongly influenced the participants' behaviour in manipulating the figures. Instead of dragging the points and analysing the figure through multiple representations, initially some of the prospective teachers avoided the ones that did not match the prototypical image. For instance, the first reaction Tita had when she opened the parallelogram's sketch was to transform it as shown in Figure 1:

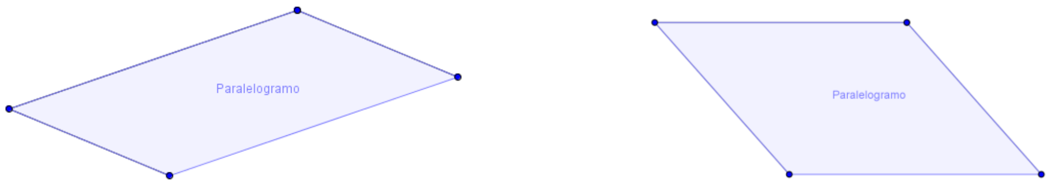


Figure 1. Parallelogram's representation before and after dragging

In fact, Tita's group wrote the conclusions about the properties of sides and angles of the parallelogram using a static representation, which resulted in statements such as "two acute angles and two obtuse angles; opposite angles are congruent." However, as they moved to more unfamiliar quadrilaterals and the investigation of invisible elements such as diagonals, they begun to drag the dynamic sketches. This action led to cognitive conflicts because they had to deal with non-prototypical examples and particular cases. The following dialogue shows how participants were intrigued by the representation of a kite that appeared on the screen (Fig. 2) that is different from a prototypical image:

[14] As described for the Shape Makers microworld (Battista, 2008b).

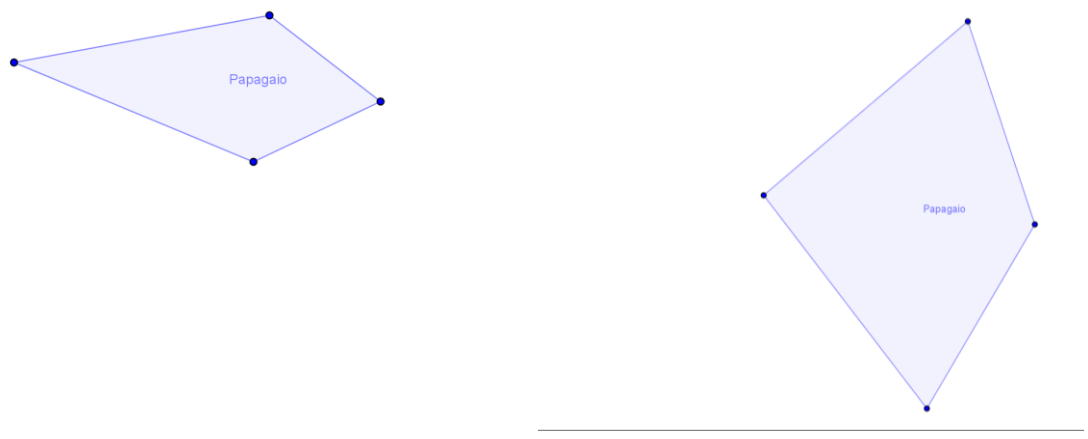


Figure 2. Kite's representation before and after dragging

Tita: So, this is still a kite?

Teacher: It is still a kite, exactly. It does not correspond to the image we usually have of a kite. Nonetheless, it is still a kite.

Tita: We tried to change it, but, afterwards, we thought that it stopped being a kite.

Teacher: Well, you can change it as you wish, it is constructed in a way that…

Tita: But we can put it a rhombus, but in that case it is not one [kite], is it?

Teacher: If it comes to be a rhombus that means [the rhombus] is a particular case. [Helena looked at Cristina, suspiciously]

This dialogue shows that, just like younger students from previous studies, these participants had limited figural concepts and that the DGE gave them the opportunity to broaden the images associated to the concept of kite. In addition, their language focus much more on the movement and transformation, than on the properties. From the point of view of the levels of understanding of inclusive relations, concerning kites, these prospective teachers were at the *prototypical classification* comprehension level and their judgement about the figures probably was based on their appearance, because they had no measures nor tried to test any property (prototypical judgment type 1). In fact, it was necessary to explicitly stimulate the participants to consider all the representations on the screen as particular cases of a class, instead of disregarding the examples that did not match the prototypical image. After the teacher's intervention, Tita, Cristina and Helena returned to the analysis of the kite:

Tita: So the diagonals… The largest bisect the smallest. No, wait! It may be the other way around!

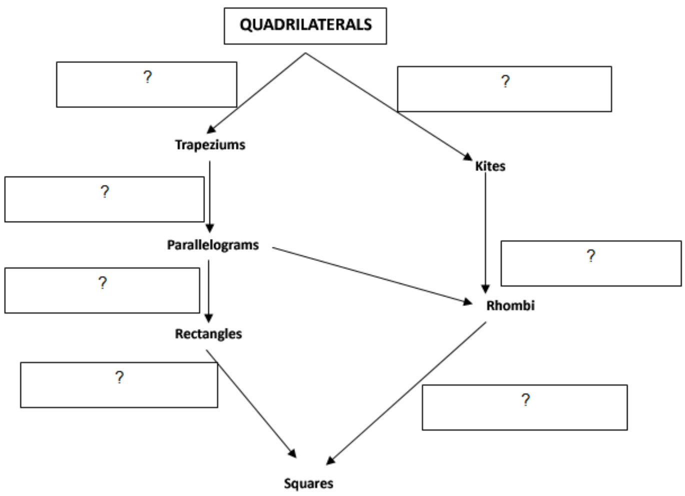
And it may happen that they have the same sides, with the same length!

Helena: No…

Tita: But that is an exception.

So, although the task did not ask explicitly to considerer the relationships among figures, the participants begun to show up when each quadrilateral was investigated using GeoGebra. In most cases, like this group of prospective teachers, the teacher insisted on considering many representations of each class, including particular cases. Besides, usually one of the elements of the group understood better this suggestion and prompted the others to consider it, as it happened with Tita in this group. This confirms the strong need for support and reflection suggested by Battista (2008b) and that the link between movement constrains or possibilities to the conceptualization of the properties of figures is far from immediate.

After investigating the properties of the quadrilaterals using GeoGebra, the class presented and discussed collectively their findings. Then, they moved to the next task, in order systematize the relationships between the quadrilaterals that emerged from the investigation, using a Venn diagram and a flowchart (Fig. 3).



Analyse the validity of the following statements. If they are false, present a counterexample; if they are true, justify them.

a. All squares are rectangles;

b. All parallelograms are rectangles;

c. All squares are kites.

Figure 3. Excerpt from the task on classification of quadrilaterals

In the flowchart the participants had to fill in the spaces with the properties that would lead to the next quadrilateral. In some cases, there was more than one possibility, but they had to consider also the quadrilaterals appearing in "lower levels". This prompted many discussions:

Cristina: It is "Having parallel sides/Without parallel sides" [referring to the first two spaces above]. No, but the rhombus has parallel sides...

Tita: No, we're talking about the kite!

Cristina: Yes, but here it can't be "Without parallel sides" because the rhombus has parallel sides.

Tita: So it must be… "Two pairs of consecutive sides equal"… It is also true for rhombi. What about "perpendicular diagonals"?

Cristina: No…

Tita: It fits the kite, rhombus and square.

Helena: Yes, I think we should say "perpendicular diagonals".

The group ended up writing "two pairs of consecutive sides equal" for the kite. However, even if they did not realize that perpendicular diagonals was not enough to produce a kite, this discussion turned their attention to the critical attributes of a class, which represents a significant step towards the hierarchical classification. This properties were further explored by the definition task, where they had to critique and produce definitions for some quadrilaterals.

We will now discuss how the prospective teachers analysed the validity of the three statements presented in figure 3. The first statement had a 100% success, as all answered correctly, presenting an answer in accordance to the *hierarchical classification level* of rectangles. The justifications were very similar to the answer in figure 4, and only three participants argued for the statement's veracity solely based on the existence of four right angles. These answers focus on the critical attributes (analytical judgment) and acknowledge "the opposing direction inclusion relationship".

a. *True. All properties of the rectangles are included in the properties of the squares, such as four right angles and two pairs of parallel sides. The square is a particular case of a rectangle.*

Figure 4. Isabel's answer to question a of the quadrilaterals task

The second statement (all parallelograms are rectangles) obtained an identical success. The given answers showed different levels of sophistication, potentially indicative of the different ways of thinking. Among these answers, 79% were based on the critical attributes of parallelograms, showing the understanding that a rectangle is a parallelogram, but not all parallelograms are rectangles. It is the case of the answer shown in figure 5. The remaining 21% answers were solely based on the asymmetry of relations between the parallelogram and the rectangle, simply stating "false, since the rectangle is a particular case of the parallelogram", a statement that, although correct, does not provide a proper justification.

b. False, because rectangles are particular cases of parallelograms – both have two pairs of parallel sides – but parallelograms may not have four right angles.

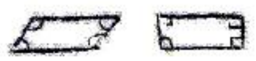


Figure 5. Anabela's answer to question b of the quadrilaterals task

Therefore, the first two statements had complete success, putting the prospective teachers at the level of *hierarchical classification* for the figures in question. However, the analysis of the answers to the third statement suggests that the fact that the square and the kite do not have a "direct" relation (considering the flowchart or the Veen diagram previously analysed) or have less common attributes, may alter significantly the degree of difficulty of the question. In fact, slightly more than half of the participants acknowledged that squares belong to the class of kites, making it possible to organize their answers in the following way (Table 3).

Table 3

Performance of the prospective teachers regarding question c, using Fujita's (2012) model.

Level	**Hierarchical classification**		**Partial prototypical**	
Frequencies	10 (53%)		9 (47%)	
Type of answer and frequencies	Uses transitivity 4 (21%)	Uses the properties of the figures 6 (32%)	Only recognizes "direct" relationships 5 (26%)	Misinterprets "two pairs of equal consecutive sides" 4 (21%)

Let us analyse some answers corresponding to these categories. In the group of 10 participants corresponding to the *hierarchical classification level* of kites, four of them used the transitivity relation, without reference to any properties, assuming that a square is a rhombus and a rhombus is a kite, therefore a square is a kite. The remaining six gave similar answers to the one presented in figure 6, distinguishing among themselves by the quantity of properties mentioned. This answer focus on critical attributes of the kite (analytical judgement) and acknowledges that the square has an attribute that is noncritical to be considered a kite.

c. It is true. In order to be labelled a "kite", a figure has to have two pairs of consecutive sides of the same length, a condition satisfied by the square, although this is a particular case, having all sides equal.

Figure 6. Carla's answer to question c of the quadrilaterals task

The answer in figure 7 is representative of the answer of five prospective teachers that only recognises "direct relationships" and corresponds the *partial prototypical classification level* of kites. In this level, individuals identify some inclusive relations, but not others. These participants accept the inclusion of squares in the class of rhombi; others also refer the inclusion of rhombi in the class of kites. However, they seem to have the idea that only one type of quadrilateral can be considered a particular case of another.

c. False because all squares are rhombi. A square is a particular case of a rhombi.

Figure 7. Sandra's answer to question c of the quadrilaterals task

Finally, we have another group of four prospective teachers that presented answers that seem to correspond to a level of *partial prototypical classification* of kites because they argue based on critical attributes. However, as the answer shown in figure 8 suggests, the underlying reasoning maybe also based on prototypical images (prototypical judgement type 1 and 2). With respect to properties, the participants did not seem to find the relation between the properties "four equal sides" and "consecutive equal sides two by two", meaning that they did not understand that the first statement implies the second one. An explanatory hypothesis is the incorrect interpretation of the property "consecutive equal sides two by two", which might have been understood in a strict sense, that is, "**solely** consecutive equal sides two by two", which coincides and is reinforced by the image of the prototype figure.

c. False. A kite has to have consecutive sides equal 2 by 2, on the contrary, a square has to have 4 sides equal.

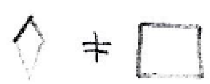


Figure 8. Anita's answer to question c of the quadrilaterals task

To better access the reasons that might restrain individuals of assuming this relation, we present the following episode that took place in the group we follow, when each one shared their answer. In the individual record, Tita answered correctly based on the relation of transitivity, while Fernanda and Helena gave incorrect answers:

Tita:	Kites have no parallel sides… I mean… Here it is written "the square is a particular case of a rhombus". If a rhombus is a kite, then… then… Did you answered "false", in the third one?
Fernanda:	Yes… The rhombus is a particular case of a kite.
Tita:	And, if a square is a particular case of a rhombus… then that means it is also a kite! Oh, I can't understand a thing… This makes no sense…
Tita:	[consults her record sheet of the properties of quadrilaterals] Two pairs of equal consecutive sides, a pair of opposite congruent angles, the diagonals are perpendicular, one of the diagonals bisects the other. Of course, since the square has all the characteristics of the kite… And more. So… it makes sense!

Meanwhile, the teacher was passing by the group and notices Helena's confusing expression:

Teacher:	Helena is not convinced… Talk to me.
Helena:	I don't know…
Teacher:	Is it hard to accept it, is that it?
Helena:	Yes! But I also think it is because we see that they are so different… because a rhombus and a square are… ok, now these are so different…
Tita:	Yes, for me it makes no sense at all…

The teacher left the group to reflect upon the subject a bit longer. Although they kept on thinking, the prospective teachers seemed yet confused:

Helena:	That they are "descendent", I get it, but it frustrates me to see that a kite has no parallel sides, so how is it a square also a kite??? If a square has all parallel sides! This was the first thing I wrote on the worksheet!
Tita:	Yes, yes, kites have no parallel sides and squares have them all.
Helena:	Those opposite.
Tita:	Yes. I do not know what to say, seriously… I am confused.

Our first comment concerns Tita's reasoning. Although she answered correctly, whether using transitive property or deducing the relation from the critical attributes of the kite that does not prevent her from doubting or being disturbed by her own conclusions. In her discourse, she begins by producing a prototypical judgement type 2 because she bases her reasoning on the attributes of kites but adds unnecessary ones. However, when she restricts her reasoning to critical attributes, she accepted the relationship. Fernanda had a very limited intervention, which prevents us from truly understanding her reasoning, besides the fact that she already acknowledged some relationships. However, Helena's statements give us interesting clues about the obstacles that this prospective teacher found in accepting that a square is a particular case of a kite. On one hand, Helena's representation of the square was very "distant" from the one she associates to the kite, which leads us to the prominent influence of prototypical images (prototypical judgement type 1). On the other hand, the analysis of the properties did not help her, as Helena made the mistake of imposing a noncritical attribute to kites (nonexistence of parallel sides) and judge the square by it (prototypical judgement type 2).

In the collective discussion, the teacher addressed the difficulties that she found while supporting the work of the group. She was surprised by the fact that the participants acknowledge the relationship between squares and rhombi, and between rhombi and kites, but did not recognise the relationship between the squares and kites. She asked Helena to share her thoughts:

Helena: I find it very strange because when I see a kite — this is the one that I think is the most shocking — I never see a square there, that's why I find it hard to see that a square is a particular case of a kite.

Teacher: So let's see. The image that we have of a kite is very different from the image we have of a square and so of course we react against it, it costs us to accept that. This is natural. But this is what we have to see: does the square meet the conditions of the kite? Let's check.

The discussion continued with the prospective teachers stating the properties that they wrote when they made the investigation using GeoGebra and verifying if the square met those properties. This was also discussed using other quadrilaterals, such as the parallelogram.

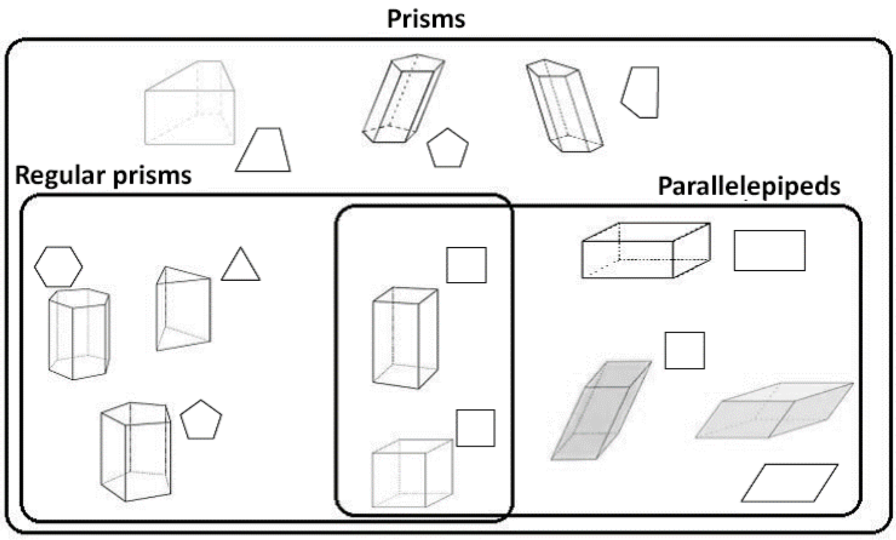
Therefore, in the beginning of the course, the participants showed very limited figural concepts of quadrilaterals, ignored some properties (especially those related to diagonals or more unfamiliar quadrilaterals) and did not relate quadrilaterals or think about them as elements of a class. The work undertaken favoured the evolution of the participants that extended their figural concepts and begun to consider the organization in hierarchical classes. However, just about half of the class seemed to evidence understanding of all relationships among quadrilaterals and still struggled with it. The teacher addressed those difficulties in the collective discussion of the task, encouraging an analytical judgment of the geometric figures, instead of an analysis based on the prototypical images.

4.2. Classifying prisms

The classification of quadrilaterals begun with the analysis of their properties (using GeoGebra), so the classification of prisms took the same path as quadrilaterals, but, in this case, using manipulative solids. The participants were engaged in a classification game following these rules: the teacher presents a set of solids on a table; she thinks of a criterion for separating the solids into two subsets — one set has the attributes that meet the criterion (set A) and the other does not (set B). A person gives a solid to the teacher who places it in the respective subset. This action is repeated until the criterion thought by the teacher is discovered. In order to do so, the participants have to identify the attributes that are common to the set A but that no element belonging to the set B meets. This reasoning is consistent with the process of classifying, has suggested by Mariotti and Fischbein (1997). This task was developed using the following criteria: polyhedra/other solids; prisms/other solids; parallelepipeds/other solids (see figure 9).

Figure 9. Organization of the solids during the game using the parallelepipeds criterion

After the game, the class worked on a classification task focusing on prisms (see figure 10 for an excerpt of the task). They analysed which properties characterized straight and oblique prisms, and parallelepipeds. Subsequently, they organized a new Venn diagram (question 8) and identified the relations among classes (question 9).



2. What distinguishes regular prisms from other prisms?

   …

6. Analyse the validity of the following statements:

   a. The parallelepipeds are regular prisms; b. There are regular prisms that are parallelepipeds; c. All quadrangular prisms are parallelepiped.

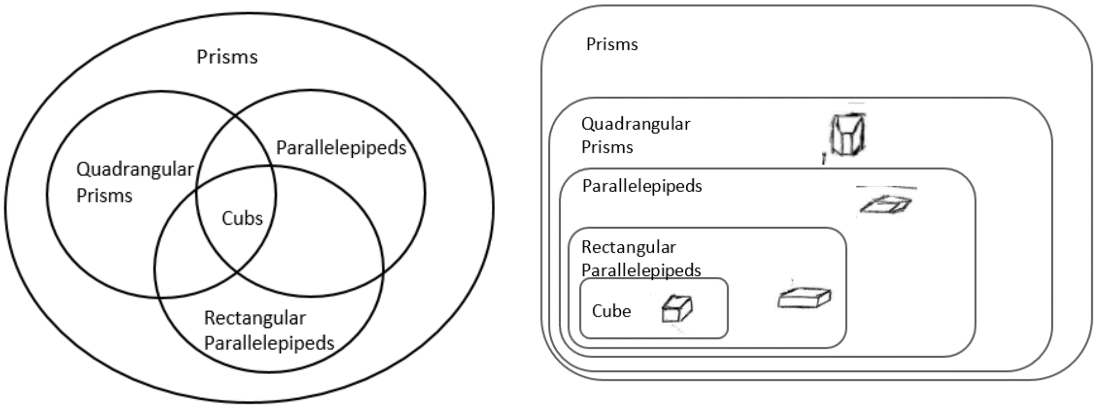
   …

8. Construct a Venn diagram that includes the following classes of solids: quadrangular prisms, cubes, parallelepipeds, prisms, rectangular parallelepipeds.
9. State two relations that result from the previous organization.

Figure 10. Excerpt from the prisms task

The participants showed difficulties in answering question 2 because they were looking for a single attribute that distinguishes regular prisms from other prisms, and did not consider a conjunction of attributes. On the contrary, they answered question 6 easily, although the teacher had to clarify the meaning of "quadrangular".

We focus now on the results of questions 8 and 9. Up until that moment, all tasks involving Venn diagrams presented the criteria setting each class or examples for each class, like the one presented in Figure 10. Question 8 asked for the first time to create a Venn diagram without this information, solely knowing which classes to include. Therefore, knowing that the participants had already shown difficulties in classifying quadrilaterals, we consider surprising that all of them presented a completely accurate diagram. This does not mean that the participants immediately presented the correct answer, as in several cases the diagram originated discussion and reflection among them, as well as attempts that were subsequently abandoned, as shown in Julia's records (Fig. 11a and 11b).



Figures 11a and 11b. Júlia's first attempt and final answer of question 8 of the task

Tita, Cristina, Fernanda, and Helena presented answers that were globally correct, but needed to sketch provisory diagrams that were used to think and discuss amongst themselves, as the following dialogue shows:

Cristina:	Easy… Quadrangular prisms… It may be a parallelepiped or not… But it can also be a rectangular parallelepiped…
Tita:	I think that this [class] is wider.
Cristina:	It can be a cube…
Helena:	This one?! Can it be a cube?
Cristina:	Not this one, the set!
Tita:	Are you drawing inside?
Cristina:	Why, how are you doing it?
Tita:	I am drawing separately… [Disjoint sets]
Cristina:	This is a quadrangular prism. It has four sides [the base polygon]. But there are also parallelepipeds that are quadrangular prisms.
Helena:	All of them. All parallelepipeds are quadrangular prisms!
Cristina:	OK. So, this one [parallelepiped] has to be on both.
Helena:	It has to be inside!!! If all parallelepipeds are quadrangular prisms… It has to be inside! Here ["outside" the parallelepipeds but "inside" the quadrangular prisms] is this one, for instance. It has four [edges in the base] and it is not a parallelepiped, but it is a quadrangular prism.
Fernanda:	The cube can't also be a quadrangular prism?

Tita: I already know it!!!

This dialogue concerns the inclusion of parallelepipeds in the class of quadrangular prisms. Although there is not an explicit discussion on the properties, we realize that the participants were making that analysis focusing on a critical attribute of these prisms — the base has four edges (analytical judgement). The discussion led to a correct organization, however we highlight another aspect: the participants were thinking about the classes of solids and, so, were considering each solid as an element of such class. Tita's first intervention about the inclusiveness of the class she was thinking of is a sign of that, and so is Cristina's comment about the class of solids that includes the cube (referring to quadrangular prisms), Helena's statement about parallelepipeds being quadrangular prisms, and even Fernanda's question at the end of the episode. Another aspect that arises from this discussion concerns the way the participants faced intersections among classes. Although, initially, Tita and Cristina did not consider the hypothesis of putting each class inside another, for Helena that idea was perfectly clear.

This stage of the work shows that the participants acknowledged relations among several solids and were seeking to find an organization that accommodated all relations coherently. Venn diagrams produced by each one are similar to Júlia's final one (Fig. 10b), globally corresponding to the intended organization. Only Fernanda presented a slightly different diagram, as it does not include the class of cubes that, like we saw in the dialog, raised her some questions. This difficulty concerning the cube may derive from the fact that it is more difficult to hierarchically classify figures for which a person has a stronger conceptualization, as it is the case of the square or cube. In addition, the image of a cube is more "distant" from a common quadrangular prism than it is from a rectangular parallelepiped, an aspect that affects the analyses of the figures.

Concerning the establishment of relations (Question 9), with the exception of a mistake, all participants presented correct relations. Besides, contrasting to what happened with relations among quadrilaterals, the participants presented "indirect" relations, based on the Venn diagram, as Helena's answer (Fig. 12) illustrates.

9. *A cube is a parallelepiped. A rectangular parallelepiped is a quadrangular prism.*

Figure 12. Helena's answer to question 9 of the task

Helena's answer is a correct example among several others, although very significant, taking into account that, during the classification of quadrilaterals, she struggled with the idea that a square is also a kite. In the class, there is only one partially correct answer (Fig. 13).

9. All cubes, rectangular parallelepipeds and parallelepipeds are quadrangular prisms. All rectangular parallelepipeds are cubes.

Figure 13. Vânia's answer to question 9 of the task

Although Vânia made a correct Venn diagram and her first statement is consistent with the diagram's organization, she reverses the implication by saying that "all rectangular parallelepipeds are cubes". This happened often in the participants' oral speech, which they self-corrected most of the times.

Therefore, the organization of classes in a Venn diagram and the establishment of hierarchical relations among prisms correspond to the level of *hierarchical classification* for the whole class, with some reservations regarding Fernanda that did not put the cube in the diagram and Vânia who made a mistake concerning the relation involving cubes and rectangular parallelepipeds.

4.3. Returning to quadrilaterals

The evolution that we recognise in learning the hierarchical classification of prisms leads us to question a general evolution in the classification process and the reasoning itself. In particular, this means that the participants were, at the end of the course, able to classify figures hierarchically, including the quadrilaterals?

In the final and individual evaluation test, the class was asked to evaluate the validity of the following statements:

A: Parallelograms do not have symmetry axis.

B: All squares are kites.

The answers allowed us to situate the participants in the following levels: Hierarchical classification of parallelograms, if they considered sentence A false and justified using particular cases; Prototypical classification of parallelograms, if they considered sentence A true and justified using oblique parallelograms; Hierarchical classification of kites, if they considered sentence B true and justified using critical attributes of kites; Partial prototypical classification of kites, if they considered sentence B false but mentioned that squares are particular cases of other quadrilaterals. In some cases, the justification was inconclusive, so we present those cases separately. Table 4 present the performance of the prospective teachers regarding this question.

Table 4

Performance of the prospective teachers regarding the question in the test, using Fujita's (2012) model

Quadrilateral	**Parallelogram**			**Kite**		
Level	Hierarchical classification	Prototypical classification	Not classified [15]	Hierarchical classification	Partial Prototypical classification	Not classified
Frequencies	15 (60%)	5 (20%)	5 (20%)	14 (56%)	3 (12%)	8 (32%)
	Both hierarchical classification 8 (32%)					
	Both prototypical classification 1 (4%)					

As the results show, approximately 1/3 of the prospective teachers gave answers consistent with a hierarchical classification for the kite and the parallelogram, only one participant answered according to a prototypical classification for both quadrilaterals and most of the participants showed a mixed understanding. In order to get a sense of these cases, we present two answers that address the most common mistakes:

A. False. Common parallelograms do not have symmetry axis. However, rectangles are particular cases of parallelograms because all the angles measure 90° and they do have symmetry axis.

B. False. The correct sentence should be: "all kites are squares" because kites are particular cases of squares since they meet the condition consecutive sides are equal 2 by 2.

Figure 14. Isabel's answer to the question in the final test

We may find Isabel's answer (Fig. 14) disturbing because she relates correctly a particular case to a more general case for the class of parallelograms (hierarchical classification level), but she inverts the relation of the square and the kite, even though she identifies a critical attribute that supports the correct relation. In fact, in this case she does not apply "the opposing direction inclusion relationship". So, she probably knows the properties of the quadrilaterals involved, she identifies common critical attributes, but still her logical reasoning shows some weaknesses. It is not a case of prototypical

[15] These cases correspond to responses with insufficient information or that involve logical contradictions or language inadequacies.

judgment because Isabel does not justify based on noncritical attributes of kites. Although this answer has contradictory elements about her thinking, in fact we found these problems in most of the participants in the category "not classified".

Lucia's answer is also inconsistent from the hierarchical classification point of view.

A. *True, if we overlap two halves of the figure they do not match.*

B. *True, because squares are particular cases of all kinds of quadrilaterals so, in particular they are special kinds of kites. Squares have consecutive sides congruent 2 by 2.*

Figure 15. Lucia's answer to the question in the final test

She (Fig. 15) also shows understanding some properties and, in sentence B, she justifies correctly why we should consider a figure as a special case of a class, when using the square and the kite. In this case, she makes an analytical judgment and understands "the opposing direction inclusion relationship" (hierarchical classification level). In fact, this answer shows she knows that a square is a parallelogram. However, in sentence A she is clearly thinking about oblique parallelograms and she disregards particular cases (prototypical classification). Because this type of answer was very common, the teacher asked why they made this mistake and some participants said they assumed we meant oblique parallelograms and "not all parallelograms" as the word "all" was not present.

These data from the final test shows that most of the participants evolved significantly from the beginning of the course, when only some of them knew the relationship between squares and rectangles. At this final stage, 1/3 responded according to the hierarchical classification of both quadrilaterals and almost the entire class showed some knowledge of the hierarchical classification. In fact, most of the wrong answers are related to difficulties that were not caused by prototypical images or ignorance about the properties of quadrilaterals, but by misunderstandings relating the interpretation of the discourse and logical reasoning. This is consistent with De Villiers' conclusion (1994) on the nature of difficulties that result from the process of classifying itself.

5. Conclusion

In the beginning of the course, the participants showed very limited figural concepts of quadrilaterals and ignored some properties, especially those related to diagonals or more unfamiliar quadrilaterals. From the hierarchical classification point of view, the prospective teachers did not acknowledge the relationships between quadrilaterals and only few of them considered a square as a particular case of a rectangle and could explain why.

As suggested by Battista (2008a), the work undertaken using GeoGebra broaden their figural concepts as the prospective teachers generated numerous examples through dragging, including non-prototypical images and particular cases. In addition, they identified the critical attributes by noticing the invariant relations. However, this process needed much support from the teacher and even from some participants who played an important role in challenging their colleagues' fixed prototypes. Following this activity, in the classification task, we noticed some evolution because all participants acknowledged some relationships and justified it correctly, achieving the *level of hierarchical classification* for rectangles and parallelograms (Fujita, 2012). However, just about half of them reasoned according to that level for the kites. Such difficulties were largely due to the inexperience in classifying geometric objects (including the notion of class) and to the strong conceptualization of some quadrilaterals. This aspect seemed to influence the participants' reasoning particularly when the relationship between the quadrilaterals was not "direct" (like squares and rhombi), which lead them to make prototypical judgments based on the appearance or the critical attributes of a prototypical image that they take for reference (Hershkowitz, 1989). In order to change this behaviour, the teacher invited the prospective teachers to share their difficulties, discussed their reasoning and encouraged them to make an analytical judgment of the geometric figures in order to classify them correctly.

Concerning the hierarchical classification of prisms, the construction of the Venn diagram and the indication of the relations among figures showed a remarkable evolution. On one hand, the participants constructed correct diagrams and presented hierarchical relations among "distant" figures — like the cube being a parallelepiped — and even more examples of "close" ones — like the parallelepiped being a quadrangular prism. Thus, the prospective teachers did not seem to analyse the different examples by their "distance" to the prototypical example. Instead, they were more able to produce analytical judgments (Hershkowitz, 1989). On the other hand, their discourse shows how they thought about the solids as classes of figures, facing diagrams as representations of concepts (Battista, 2008a), a fundamental aspect of classifying geometric figures. Regarding the levels of understanding of the inclusive relations, in the case of prisms, all prospective teachers were at the level of *hierarchical classification* (Fujita, 2012), with reservations for two participants. This conclusion seems to be paradoxical if we take into account that prisms are more complex figures than quadrilaterals and that, ultimately, their hierarchical organization is dependent on the organization of quadrilaterals, where the class had more difficulties. However, there are two reasons that might explain this evolution. On one hand, from one task to the other, the prospective teachers learned about the classification process, both regarding its meaning, the analytical judgment underlying the relationships and the ways of representation that we use to highlight relationships among figures. On the other hand, the strong conceptualization of quadrilaterals may conflict with the need of, simultaneously, emphasizing properties that are common to the class while ignoring others (Mariotti & Fischbein, 1997). Thus, the fact that the hierarchy among prisms was more easily established by the participants than the hierarchy among quadrilaterals, may be due to the lower familiarity that they have with such solids, which may release them from the fixation in noncritical attributes.

Therefore, comparative analysis of the results between the participants' classification of quadrilaterals and the classification of prisms shows a positive and significant evolution. However, when we turned again to the quadrilaterals in the final test, we still encounter misunderstandings, most often related to the interpretation of the discourse and logical reasoning and not so much to the limited figural concepts. This reinforces two ideas. On one hand, the nature of the analysis individuals make of figures (prototypical or analytical) also depends on the type of figure (Hershkowitz, 1989) which leads to different levels of understanding of the hierarchical classification (Fujita, 2012). This is probably due to the fact that individuals may be at different Van Hiele levels or in their transition (Battista, 2009; Gutiérrez et al., 1991). On the other hand, the hierarchical classification of geometric figures is a complex process, which does not depend only of the recognition of their properties (De Villiers, 1994). This suggests the need for further research that focus on the way individuals classify figures hierarchically taking into account the aspects already considered by Fujita (2012) and also including other factors that influence reasoning, such as language interpretation and logical reasoning.

Finally, this study supports De Villiers' (1994) perspective, when he says that the hierarchy among figures must not be imposed by the teacher; rather there must be an effective involvement of the students in the construction and discussion of different classifications, as well as a negotiation of meanings and an appreciation of the different types of classification. This suggestion is validated by the results of our teacher education experiment, based on an exploratory approach. The dialogues that we present show how the interaction between the teacher and the prospective teachers and among them promotes the verbalization of the reasoning and the debate of divergent ideas, leading to argumentation. Through interaction, the participants supported each other, but also challenged each other. This approach gave the prospective teachers the opportunity to engage actively in the construction of their knowledge and challenged their previous conceptions as they were asked to interpret the given information, and to represent and communicate their solutions of the task to each other and to the teacher.

References

Ball, D. L. (2000). Bridging practices intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*(3), 241-247.

Battista, M. T. (2008a). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (vol. *2*, pp. 341-362). Charlotte, NC: Information Age.

Battista, M. T. (2008b). Development of the shape makers geometry microworld. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (vol. *2*, pp. 131-156). Charlotte, NC: Information Age.

Battista, M. T. (2009). Highlights of research on learning school geometry. In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 91-108). Reston, VA: NCTM.

Brunheira, L. & Ponte, J. P. (2015). A influência das representações na classificação de quadriláteros em futuras professoras e educadoras. In M. V. Pires, R. T. Ferreira, A. Domingos, C. Martins, H. Martinho, I. Vale, … L. Santos (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2015: Representações Matemáticas* (pp. 196-208). SPIEM.

Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(4), 237-243.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 133-148.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

Erdogan, E. O. & Dur, Z. (2014). Preservice mathematics teachers' personal figural concepts and classifications about quadrilaterals. *Australian Journal of Teacher Education, 39*(6), 107-133.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. Educational studies in mathematics, 24(2), 139-162.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 60-72.

Fujita, T. & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education, 9*(1), 3-20.

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics education, 22*(3), 237-251.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 61-76.

Hershkowitz, R., Bruckheimer, M., & Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12, NCTM 1987 yearbook* (pp. 223-235). Reston, VA: NCTM.

Jones, K. & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 109-149). Rotterdam: Sense.

Kaur, H. (2015). Two aspects of young children's thinking about different types of dynamic triangles: prototypicality and inclusion. *ZDM Mathematics Education, 47(3),* 407-420.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and in the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mariotti, M. A. & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 219-248.

Markman, E. M. (1989). *Categorization and naming in children*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children views of the difference between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics, 42*(2), 179-196.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Okazaki, M. & Fujita, T. (2007). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of PME 31* (Vol. 4, pp. 41-48). Seoul, Korea.

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J.P. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Tempera, T. (2010). *A geometria na formação inicial de professores: Contributos para a caracterização do conhecimento dos estudantes* (Master's dissertation, Instituto Politécnico de Lisboa), Lisboa.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics education*, *48*(5), 691-719.

Sinclair, N. & Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment. *International Journal of Educational Research*, *51*, 28-44.

Steele, M. D. (2013). Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(4), 245-268.

Watson, A. & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4), 205-215.

Anexo B. Artigo 2

<u>Versão dos autores</u>

Definir figuras geométricas: uma experiência de formação com futuras professoras e educadoras

Defining geometric figures: A teacher education experiment with prospective elementary and infant teachers

Lina Brunheira

ESELX — Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Resumo. Este artigo relata uma investigação envolvendo uma experiência de formação com futuras professoras e educadoras na unidade curricular de Geometria do 2.º ano de uma licenciatura em educação básica. O tema da investigação é a construção de definições, um processo que foi promovido por um ensino de natureza exploratória. Especificamente, pretendemos saber quais as características sobre a definição de figuras geométricas a que os futuros professores atendem quando selecionam e constroem definições e como se relaciona a estruturação espacial e geométrica das figuras com o processo de definir. Os dados foram recolhidos por registos áudio e vídeo das aulas e das produções escritas das formandas sobre as definições de quadriláteros e do paralelepípedo. Os resultados mostram que, inicialmente, as formandas tinham uma conceção muito limitada do que é uma definição, restringindo-se às propriedades necessárias. Com o trabalho desenvolvido passaram a considerar o caráter suficiente e inclusivo da condição apresentada. Construíram definições tendencialmente corretas mas não económicas, mobilizando um conhecimento mais profundo das figuras. A estruturação geométrica e espacial influenciou o processo de definir, mas evoluiu igualmente com esta atividade. Finalmente, a construção de definições como etapa final do estudo das figuras promoveu a articulação entre as definições e sua classificação.

Palavras-chave: geometria, quadriláteros, raciocínio geométrico, estruturação, definir, formação inicial de professores.

Abstract. This article reports a research concerning a prospective teacher education experiment, in a geometry course in the 2nd year of studies of a degree in education. The subject is the construction of definitions, a process developed through working on exploratory tasks. Specifically, we seek to know which features of definitions of geometric figures do prospective teachers attend to when selecting and constructing definitions and how the spatial and geometric structuring of the figures relates to the process of defining. Data was gathered from the participants' reports, audio and video records of classroom discussions on definitions of quadrilaterals and of parallelepipeds. The results show that initially the participants had misconceptions about definitions, just focusing on the necessary properties of the figures. The work developed led them to consider the sufficiency and inclusiveness of the condition. The participants constructed mostly correct but not economic definitions, mobilizing a deeper knowledge of the figures. The spatial and geometric structuring of the figures influenced the process of defining, but also evolved with this activity. Finally, the construction of definitions in the final stage of the study of figures promoted the articulation between the definitions and their classification.

Keywords: Geometry, Quadrilaterals, Geometric reasoning, Structuring, Defining, Prospective Teacher Education

Introdução

As definições têm um papel decisivo na matemática. Como refere Veloso (1998), "sem definições não existe matemática, nem é possível a comunicação matemática" (p. 375). Contudo, na sua opinião, em geometria existe uma tradição que apelida por "definomania", que consiste numa preocupação excessiva em apresentar de início todos os termos ou conceitos que irão ser utilizados no trabalho posterior. No seu entender, os conceitos devem ser construídos de forma lenta e progressiva, em vez de se impor artificialmente definições que, ao contrário do que se pensa, muitas vezes têm apenas um carácter relativo. Os alunos devem familiarizar-se progressivamente com as definições, o que deve resultar da sua experiência matemática em vez de a preceder. Uma prática contrária a esta orientação leva os alunos a memorizar as definições, que acaba por conduzir a dificuldades em raciocinar de acordo com elas (De Villiers, Govender, & Patterson, 2009; Mariotti & Fischbein, 1997).

Uma perspetiva que procura contrariar este problema consiste na valorização do processo de definir. Para De Villiers (1998), definir é um processo matemático crucial na compreensão dos conceitos em geometria e recorda Freudenthal (1973) que se opunha a um ensino da geometria que priva os alunos dessa oportunidade. Também Mariotti e Fischbein (1997) consideram o processo de definir como uma componente do raciocínio geométrico, pelo que defendem a sua presença nas aulas de geometria. Pelo seu lado, Zazkis e Leikin (2008) notam que, para que os professores possam contemplar este processo nas suas aulas devem ser nele proficientes, pelo que deve integrar a formação inicial. Leikin e Zazkis (2010) referem ainda que as ideias dos professores sobre definição afetam a forma como apresentam os conceitos matemáticos aos alunos, pelo que é importante dar-lhes atenção durante a sua formação, quer do ponto de vista matemático, quer didático.

Numa revisão de estudos recentes, Sinclair et al. (2016) indicam que, nos últimos anos, têm surgido alguns trabalhos respeitantes ao processo de definir e à necessidade das definições, bem como à compreensão dos alunos sobre as definições de triângulos e quadriláteros. Contudo, segundo os autores, a investigação sobre o envolvimento dos alunos no processo de construir definições é quase inexistente.

A experiência pessoal da primeira autora deste artigo na lecionação de uma unidade curricular sobre geometria numa Licenciatura em Educação Básica (LEB), evidenciou dificuldades e desafios que se colocam quando se envolvem os futuros professores em atividades de organização local, como a classificação hierárquica de quadriláteros, a qual depende das definições sobre estas figuras. Este problema conduziu ao desenvolvimento de uma experiência de formação nesta unidade curricular e, paralelamente, à realização de uma investigação orientada pelas seguintes questões: Quais os requisitos sobre a definição de figuras geométricas a que os futuros professores atendem quando selecionam e constroem definições? Como se relaciona a estruturação espacial e geométrica das figuras com o processo de definir?

Quadro teórico

Raciocínio geométrico e níveis de estruturação. Tal como no raciocínio matemático em geral, o geométrico raciocínio corresponde a um conjunto de processos que permitem extrair nova informação de informação já conhecida (Duval, 1998; Leighton, 2004; Oliveira, 2008). Também no que respeita aos tipos de raciocínio, falamos igualmente em geometria de raciocínio indutivo, abdutivo e dedutivo (Duval, 1998), sendo que o último, já por si considerado o tipo de raciocínio matemático por excelência, teve durante séculos um foco especial no ensino da geometria.

Quanto à especificidade do raciocínio em geometria, Duval (1998) considera que, estando os processos de raciocínio dependentes da forma como a informação é apresentada e organizada, no caso específico da geometria, o raciocínio tem uma componente visual forte, já que a informação é dada segundo uma organização visual, a partir da qual nós podemos nomear objetos, levantar questões e conjeturas sobre esses objetos e suas relações. Numa perspetiva semelhante, Mariotti (1992) responde a esta questão:

> O que há de específico no raciocínio geométrico? A geometria, enquanto campo matemático, lida com um tipo particular de "objetos": as figuras geométricas. Do ponto de vista matemático, as figuras geométricas são entidades puramente abstratas, completamente controladas pelas suas definições num quadro de uma axiomática, mas o que elas têm de específico é que preservam uma característica manejável pictoricamente chamada espacialidade. (pp. 9-10)

Para analisar o raciocínio geométrico Battista (2008) formulou uma categorização que parte da teoria de Van Hiele mas assume como eixo organizador uma ideia particular: a estruturação. Assim, Battista estabelece três níveis de estruturação, correspondentes a graus de sofisticação diferentes: a *estruturação espacial*, a *estruturação geométrica* e a *estruturação lógica/axiomática*. A *estruturação espacial* é um tipo especial de abstração correspondente ao ato mental de construir uma organização ou uma configuração para um objeto ou conjunto de objetos, através da identificação das suas componentes, da forma como se combinam e relacionam. A estruturação espacial está assim associada a um modelo mental, ou seja, uma versão visual, não-verbal, da situação (objeto, ação…) que é ativada para interpretar e raciocinar sobre ela (Battista, 2007). Por exemplo, diferentes formas de estruturar um quadrilátero determinam modelos diferentes, como um caminho fechado constituído por quatro segmentos, uma composição de segmentos unidos pelos seus extremos ou uma composição de quatro ângulos ligados. A *estruturação geométrica* descreve a estruturação espacial através de conceitos formais tais como congruência, paralelismo, ângulo, transformações geométricas ou sistemas de coordenadas. Assim, um paralelogramo pode ser estruturado espacialmente como uma configuração visual consistindo em dois pares de lados opostos iguais. Já a estruturação geométrica torna esta visão explícita em termos verbais através de conceitos apropriados: lados opostos congruentes e paralelos. A estruturação geométrica assenta na estruturação espacial, isto é, para que seja possível estruturar geometricamente um objeto, é necessário que o indivíduo tenha interiorizado a estruturação espacial correspondente. De outra forma, a estruturação geométrica não tem significado para o indivíduo. A *estruturação lógica/axiomática* organiza formalmente os conceitos geométricos num sistema para que as suas relações possam ser estabelecidas através de dedução lógica. Para operar a este nível, é necessário que a estruturação espacial atinja um nível "simbólico", ou seja, que as afirmações verbais ou simbólicas possam substituir os próprios modelos mentais.

Raciocínio geométrico e o processo de definir. Eleger o desenvolvimento do raciocínio geométrico com um dos principais objetivos do ensino deste tema implica dar atenção aos seus processos, entre os quais se encontra a construção de definições (De Villiers et al., 2009; Freudenthal, 1973; Mariotti & Fischbein, 1997). De acordo com Mariotti e Fischbein (1997), "o processo de definir no campo da geometria apresenta-se de grande complexidade devido quer às características gerais do processo de definir quer às características específicas dos conceitos geométricos" (p. 224). Estes conceitos requerem um movimento duplo e simultâneo entre os níveis conceptual e figurativo, envolvendo as seguintes ações:

> Observar; identificar as principais características; enunciar propriedades de acordo com estas características; voltar à observação, verificar a definição no que respeita às diferenças figurativas, e assim sucessivamente . . . O processo de elaborar a definição consiste num duplo processo partindo do particular para o geral e vice-versa, do geral para o particular. (p. 227)

A construção de uma definição para um conjunto de objetos implica assim identificar os atributos que são comuns aos elementos do conjunto e fazer uma generalização de modo a chegar a um conjunto de condições necessárias, usando raciocínio indutivo ou abdutivo; para que o conjunto de condições seja também suficiente, é necessário que implique os objetos em causa, o que envolve raciocínio dedutivo. Adicionalmente, se pretendermos que a definição corresponda a um conjunto mínimo de condições, isto é, seja económica (De Villiers et al., 2009) mobilizamos ainda raciocínio dedutivo uma vez que nenhuma condição pode ser deduzida de outras.

Podemos considerar diferentes tipos de definições em geometria. De Villiers et al. (2009) distinguem particularmente as definições inclusivas das exclusivas, o que decorre da relação entre os processos de definir e de classificar. Uma definição é considerada inclusiva "se permite a inclusão de conceitos mais particulares como um subconjunto de um conceito mais geral" (p. 191); é exclusiva se "os conceitos envolvidos são considerados disjuntos entre si" (p. 191). Historicamente, as definições inclusivas nem sempre foram as preferidas (veja-se as definições de Euclides para alguns quadriláteros), mas os autores consideram que estas definições têm várias vantagens. Do ponto de vista matemático, a utilização de definições inclusivas permite uma maior simplicidade em definir conceitos particulares e também economia na produção de teoremas. Zaslavsky e Shir (2005) sugerem ainda que as definições se distingam também pela sua "forma de apresentação", separando as definições estruturais — que recorrem às propriedades dos objetos — das processuais — que recorrem à forma como os objetos podem ser construídos.

Procurando concretizar os papéis desempenhados pelas definições, Zaslavsky e Shir (2005), apresentam quatro aspetos: (i) permitem introduzir novos objetos numa teoria e captar a sua essência exprimindo as propriedades que os caracterizam; (ii) constituem uma componente fundamental na formação de conceitos; (iii) são os alicerces da demonstração e da resolução de problemas; e (iv) permitem criar alguma uniformidade no significado que atribuímos aos conceitos, o que apoia a comunicação. Do ponto de vista dos seus princípios lógicos, Winicki-Landman e Leikin (2000) apontam aspetos igualmente referidos por vários matemáticos: (i) definir implica atribuir um nome; (ii) para definir um conceito novo, só podemos utilizar conceitos previamente definidos; (iii) uma definição estabelece um conjunto de condições necessárias e suficientes para identificar o conceito; (iv) o conjunto das condições deve ser mínimo; e (v) as definições são arbitrárias.

Como afirmam Zaslavsky e Shir (2005), há aspetos que são "imperativos" na construção de definições, como não conterem afirmações contraditórias ou não conduzirem a ambiguidades, mas há outros sobre os quais não existe consenso. A imposição de que o conjunto de condições seja mínimo, tal como defendem De Villiers et al. (2009) é um aspeto controverso, o que deriva das diferenças de opinião sobre o que constitui uma "boa definição". De facto, as definições dos conceitos não se regem apenas por requisitos matemáticos. Um exemplo disso é a preferência por definições "elegantes" (Vinner, 1991), que frequentemente se sobrepõe ao interesse da definição económica, como exemplifica a definição de retângulo que refere a existência de quatro ângulos retos, uma vez que três ângulos retos é suficiente. Outro critério a ter em conta, mais de natureza didática, é que a definição seja intuitiva (Poincaré, citado por Zaskis & Leikin, 2008), o que pode justificar que a condição "quadrilátero com quatro eixos de simetria" não seja apresentada mais frequentemente como definição para quadrado. Deste modo, a adoção de uma ou outra definição, em certa medida, é matéria de preferência pessoal e subjetiva dos matemáticos.

Como refere De Villiers (1998), apesar da importância fundamental das definições em matemática, o processo de definir é negligenciado no ensino. Mais ainda, os alunos habituam-se a lidar com definições sem nunca discutirem o conceito de definição ou analisarem exemplos de definições alternativas, o que faz com que criem conceções erradas sobre o significado e o papel das definições (Zaslavsky & Shir, 2005). Esta tendência é acentuada pelo conflito existente entre a forma como o conhecimento matemático está organizado e a forma como ele é criado e evolui (De Villiers et al., 2009; Pólya, 1975), bem como a forma como ele é aprendido (Vinner, 1991). Assim, o processo de definir "é uma atividade matemática tão importante como outros processos tal como resolver problemas, formular conjeturas, generalizar, especializar, provar" (De Villiers, 1998, p. 249)

A formação de professores dos anos iniciais em geometria. A perspetiva de que os futuros professores precisam de desenvolver uma compreensão profunda de ideias fundamentais da Matemática (Ma, 1999; NCTM, 1994) está presente em muitos estudos e programas de formação, muito embora com diferentes interpretações e formas de concretização. Na perspetiva de Ponte e Chapman (2008), esta orientação não trata simplesmente de oferecer mais matemática aos futuros professores mas, sobretudo, permitir-lhes que compreendam e reconstruam aquilo que sabem com maior profundidade e significado. Para Albuquerque et al. (2005), é necessário contemplar o estudo daquela disciplina de um ponto de vista superior e com um "estabelecimento claro das suas relações com a matemática que se vai ensinar" (p. 14).

Para o NCTM (1994), o conhecimento matemático necessário ao professor inclui o domínio de diferentes tipos de raciocínio matemático, formas de resolver problemas e de comunicar matemática eficazmente, a compreensão de conceitos, de procedimentos específicos e do processo de fazer matemática. No caso particular da geometria, os professores dos anos iniciais devem compreender como ela é usada para descrever o mundo em que vivemos e resolver problemas, saber analisar figuras bi e tridimensionais, produzir argumentações e justificações e privilegiar a visualização espacial (NCTM,1994). Em Portugal, Albuquerque et al. (2005) sugerem que, em geometria e até ao 2.º ciclo, a formação dos professores deve incluir uma perspetiva histórica do tema, um foco sobre a visualização e a representação espacial, o tratamento das formas geométricas básicas, suas propriedades e relações, transformações geométricas. Para estes autores, esta formação deverá desenvolver-se em torno de atividades próprias da matemática, como a formulação e resolução de problemas, e incluir processos a ela associados: formulação de conjeturas, teste e validação, argumentação, prova e refutação, sem ignorar o recurso à tecnologia ou outras ferramentas e materiais. No que diz respeito ao processo de definir, é também referido que "a construção das definições deve ser progressiva e resultante da experiência matemática" (p. 20).

Contudo, De Villiers (2017) refere que persiste uma crença de que uma boa prática significa fornecer primeiro uma definição concisa do conceito, depois exemplos e contraexemplos e, posteriormente, explorar as suas propriedades. No entanto, particularmente no estudo das figuras geométricas, a investigação tem mostrado que esta abordagem tem consequências negativas a vários níveis — ao nível da conceção sobre a matemática, da conceção sobre definição e das conceções sobre os conceitos definidos. No que diz respeito à matemática, conduz à ideia errada de que a criação matemática começa com definições (que os alunos não sabem de onde vêm nem como foram escolhidas) e que não existe mais do que uma definição para o mesmo conceito, promovendo uma imagem da matemática como uma ciência "absolutista" (De Villiers, 2017). No que respeita ao conceito de definição, alguns estudos revelam que os futuros professores têm ideias erradas sobre o que é uma definição, mesmo quando estudaram matemática avançada na universidade, e que esse conhecimento pode ser diferente consoante os temas matemáticos envolvidos (Leikin & Zazkis, 2010). Quanto aos conceitos definidos, vários estudos sobre a aprendizagem dos triângulos e quadriláteros, envolvendo alunos, professores e futuros professores, mostram que frequentemente os indivíduos conhecem as definições, mas não raciocinam de acordo com tais definições (e.g., Fujita, 2012; Gutiérrez & Jaime, 1999).

Desta forma, alguns investigadores fazem propostas de atividades a partir de experiências empíricas que procuraram lidar com estes problemas. Gutiérrez e Jaime (1999) sugerem que se devem criar oportunidades para que os futuros professores apresentem, expliquem e argumentem sobre definições de conceitos geométricos, analisem respostas de alunos em situações que testem estes conceitos e reflitam em torno dos seus significados. Zazkis e Leikin (2008) consideram que a construção de definições pode ajudar os futuros professores a distinguirem condições necessárias de condições suficientes, utilizarem linguagem adequada e revelarem ainda as suas conceções sobre definição. Além disso, as investigadoras sublinham que a capacidade para construir definições varia consideravelmente entre os formandos, mesmo para conceitos tão familiares como o quadrado. Desta forma, Leikin e Zazkis (2010) sugerem que seja dada maior atenção à discussão do papel da definição, sua estrutura e função, quer na matemática escolar, quer na universidade.

A análise e construção de definições está ainda alinhada com a abordagem metodológica para a formação inicial proposta por Watson e Mason (2007), segundo a qual o trabalho a desenvolver deve partir de tarefas matemáticas que promovam o pensamento matemático dos futuros professores e desenvolvam a sua perceção sobre o poder dessas tarefas. Nesta perspetiva, surge com especial interesse o ensino exploratório, assente essencialmente em tarefas de cunho exploratório e investigativo, onde cabe a quem aprende uma parte importante do trabalho de descoberta e construção do conhecimento, baseado numa dinâmica de aula em que se reserva um espaço significativo ao seu trabalho sobre as tarefas, a par de momentos de discussão e negociação de significados (Ponte, 2005).

Metodologia de investigação

Opções metodológicas, participantes e recolha de dados. Este estudo tem um propósito interventivo, visando modificar as práticas da formação inicial de professores e educadores, por forma a melhorar as suas aprendizagens e contribuir para o conhecimento sobre a sua formação, partindo da compreensão que construímos sobre a forma como desenvolvem o seu raciocínio geométrico. A investigação foca-se na aprendizagem em contexto, a partir da conceção de estratégias e ferramentas de ensino, pelo que optámos pela metodologia de investigação baseada em design, na modalidade de experiência de formação (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003) em que a professora (a primeira autora do artigo) tem também o papel de investigadora. O design da experiência é orientado pela seguinte conjetura: o processo de definir figuras geométricas i) promove o conhecimento dos conceitos a definir e a noção de definição; ii) promove o raciocínio geométrico, particularmente a estruturação espacial e geométrica; e iii) consolida o processo de classificação de figuras.

Orientada por esta conjetura, o estudo dos quadriláteros e dos prismas foi desenvolvido ao longo três fases, correspondentes a três processos: investigar as propriedades, classificar e definir (Figura 1). A investigação sobre quadriláteros recorreu ao GeoGebra, através da manipulação de quadriláteros notáveis previamente construídos pela professora, e incidiu sobre as propriedades invariantes relativas a lados, ângulos, diagonais e eixos de simetria. Seguiu-se a classificação das figuras com recurso a diagramas de Venn e a um fluxograma e, por fim, a definição de três quadriláteros (quadrado, retângulo e papagaio). Dois meses mais tarde, a turma estudou os prismas seguindo a mesma orientação: investigação sobre as propriedades, desta vez com recurso a materiais manipuláveis; classificação com recurso a diagramas de Venn e, finalmente, definição de um prisma (paralelepípedo). Cada fase foi desencadeada por uma tarefa de natureza exploratória e as aulas seguiram uma orientação consistente com esta abordagem, começando com a introdução da tarefa, seguida de trabalho em pequenos grupos e terminando com uma discussão coletiva. Apesar de trabalharem em pequenos grupos, foi pedido às formandas para que fizessem uma primeira resolução individual e, de seguida, discutissem as produções individuais com as colegas, donde deveria resultar uma produção comum.

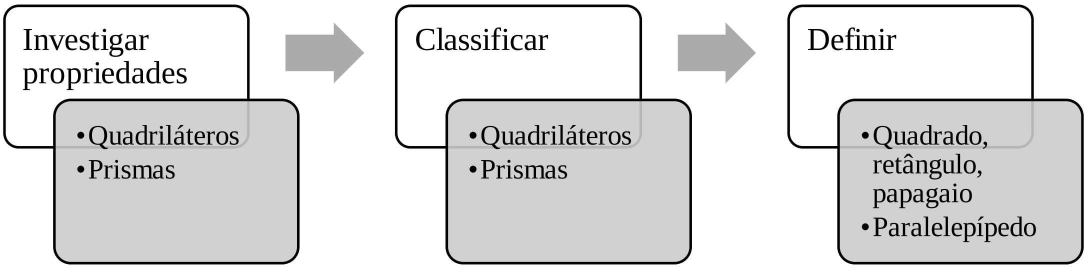


Figura 1. Orientação dada ao estudo dos quadriláteros e dos prismas

Os dados que apresentamos foram recolhidos durante o segundo ciclo do estudo, no ano letivo de 2014/15, envolvendo uma turma de 25 formandas que frequentavam a disciplina de Geometria (2.º ano da LEB). Analisamos alguns dados de toda a turma por forma a dar uma perspetiva geral sobre o tipo de definições que construíram e os aspetos que revelam, bem como as resoluções de Júlia e alguns diálogos relevantes em que interveio. Júlia é uma formanda muito empenhada e participativa, com bom aproveitamento nas disciplinas de matemática. No questionário inicial considerou a matemática relevante para a sua formação, assinalou não sentir habitualmente dificuldades nessa área e indicou não ter ainda decidido entre ser educadora ou professora de 1.º ciclo.

A recolha de dados foi feita a partir dos registos áudio e vídeo das aulas. Foi ainda realizada a análise documental das produções escritas, todas elaboradas na sala de aula. Neste artigo apresentamos dados de três tarefas: uma tarefa de diagnóstico que inclui uma questão sobre definições para quadrado; uma tarefa que integra a construção de definições para retângulo e papagaio; e uma tarefa de classificação e definição de prismas, onde se pede a definição de paralelepípedo.

Análise de dados. Neste ponto, começamos por sintetizar alguns princípios sobre definições enfatizados nas aulas. Assim, assumimos que, no contexto de trabalho sobre figuras geométricas, uma definição corresponde a uma condição, frequentemente obtida por conjunções de condições, a que a figura definida deve satisfazer para que possa ser nomeada dessa forma. Deve conter um conjunto necessário e suficiente de condições e constituir, tendencialmente, um conjunto o mínimo possível (Leikin & Zazkis, 2010). Este último princípio visou dois objetivos: compreender que esse é o modo como habitualmente as definições são apresentadas, que há vantagens em fazê-lo do ponto de vista matemático e, mais importante, raciocinar geometricamente identificando relações entre os elementos das figuras e entre as propriedades identificadas. Além destes princípios, e atendendo a que as figuras em causa foram organizadas hierarquicamente, foi ainda sublinhado o princípio de inclusão, de forma a existir coerência entre as definições e as classificações estabelecidas (De Villiers et al., 2009).

Ao selecionar ou construir definições de figuras, as formandas explicitam propriedades que, na sua perspetiva, determinam as classes, o que envolve a sua estruturação espacial e geométrica (Battista, 2008). A identificação destas propriedades pode ser reveladora de uma estruturação com diferentes graus de sofisticação. Assim, de forma a analisar a relação da estruturação espacial e geométrica das figuras com o processo de definir, temos em conta o seguinte quadro de descritores que apresenta quatro níveis de estruturação[16] (Tabela 1), muito embora não haja neste estudo intenção de atribuir níveis às formandas.

Tabela 1

Descritores dos níveis de estruturação espacial e geométrica

Níveis	**Estruturação geométrica**	
	Estruturação espacial	**Domínio de conceitos**
N0	Não estabelece relações geométricas entre as figuras e os seus elementos, ou não estabelece na maioria das vezes.	Não domina os conceitos mais elementares e a sua linguagem é muito limitada no vocabulário de geometria.
N1	Perceciona relações geométricas associadas a elementos visíveis das figuras, mas esta perceção pode depender da posição das figuras e dos seus elementos ou do contexto em que estão imersos.	No plano, utiliza os conceitos de lado e ângulo, congruência, perpendicularidade e paralelismo. No espaço, usa o conceito de vértice, aresta e face.
N2	Perceciona relações geométricas associadas a elementos visíveis das figuras em qualquer posição ou contexto.	No plano, utiliza os conceitos de eixo de simetria, diagonal,

[16] Quadro elaborado no âmbito do estudo de doutoramento da primeira autora.

	Perceciona relações geométricas associadas a elementos invisíveis das figuras, mas esta perceção pode depender da posição das figuras e dos seus elementos.	mediatriz, ponto médio e as transformações geométricas. No espaço, utiliza o conceito de congruência, paralelismo e perpendicularidade.
N3	Perceciona relações geométricas associadas a elementos visíveis e invisíveis das figuras, independentemente da sua posição ou contexto. Generaliza as relações geométricas para uma família de figuras.	

De forma a identificar quais os requisitos sobre a definição de figuras geométricas a que as participantes atendem quando selecionam e constroem definições, a análise das definições foca-se nos seguintes aspetos: a condição é necessária e suficiente; a definição é inclusiva; e a definição é económica. Usaremos as categorias apresentadas na Tabela 2, adaptadas de De Villiers et al. (2009), seguindo a terminologia dos autores:

Tabela 2

Descritores das categorias de definições construídas, de acordo com os requisitos

Características da definição construída	**Categoria**
Corresponde a um conjunto mínimo[17] (ou quase mínimo) de propriedades necessárias e suficientes. A definição é inclusiva.	Definição económica
Corresponde a um conjunto de propriedades necessárias e suficientes mas contém condições supérfluas. A definição é inclusiva.	Definição correta (mas não económica)
Contém propriedades que não são necessárias ou não são suficientes[18].	Definição incorreta

Resultados

Tarefa de diagnóstico. Na primeira aula foi realizado um teste diagnóstico de escolha múltipla que continha uma questão relativa à definição de quadrado, um quadrilátero em que as possíveis definições não envolvem questões de inclusão, o que poderia enviesar as conclusões sobre o raciocínio subjacente à escolha de cada afirmação (Figura 2):

[17] Consideramos também como definições económicas, um conjunto de condições quase mínimo de que é exemplo a definição de retângulo "Quadrilátero com quatro ângulos retos".
[18] Uma definição pode ser incorreta por ter elementos contraditórios ou ser ambígua. Contudo, na maioria dos casos, uma definição é incorreta se apresenta condições que não são suficientes ou não são necessárias.

Assinale todas as possíveis definições para quadrado:

(A) Polígono de quatro lados iguais.

(B) Polígono de quatro lados iguais e quatro ângulos iguais.

(C) Quadrilátero com quatro eixos de simetria.

(D) Quadrilátero com diagonais iguais e perpendiculares.

Figura 2. Questão da tarefa de diagnóstico sobre a definição de quadrado

As opções A e D são incorretas, pois contêm propriedades que, embora necessárias, são insuficientes para definir o quadrado. Em teoria, será mais fácil identificar que a afirmação A é insuficiente para definir quadrado, pois não há referência aos quatro ângulos retos que é uma propriedade facilmente reconhecível nestas figuras. Já a afirmação D não toma em consideração que, além das propriedades apresentadas, as diagonais têm de se intersetar no seu ponto médio. As hipóteses B e C estão ambas corretas, distinguindo-se pelas propriedades que envolvem diferentes elementos dos quadrados. De novo, as propriedades da afirmação B são mais facilmente reconhecíveis do que as da afirmação C, além de que a definição B é aquela que é habitualmente usada em manuais escolares.

Os resultados obtidos relativamente à escolha de cada opção encontram-se na Tabela 3. Todas as formandas assinalaram a definição B como estando correta, mas apenas 57% o fizeram para a outra definição correta (C). Além disso, verificamos que as opções erradas (A e D) são também selecionadas por muitas participantes, mas de novo com uma diferença significativa de representatividade. Notamos que, em ambos os casos, as definições são incorretas pela mesma razão — as propriedades que contêm verificam-se, mas não dizem respeito apenas aos quadrados.

Tabela 3

Resultados da questão sobre definições de quadrado da tarefa de diagnóstico, por alínea

Opção	**A**	**B**	**C**	**D**
%	86	100	57	54

Assim, os resultados apresentados na tabela mostram que as escolhas não se dividem tanto entre as definições corretas ou incorretas, mas entre as definições A e B que remetem para elementos visíveis (lados e ângulos) e C e D que remetem para elementos ocultos (diagonais e eixos de simetria). A menor representatividade das opções relativas a elementos ocultos pode decorrer de dois motivos: a maior dificuldade em reconhecer estas propriedades como verdadeiras (de natureza conceptual e cognitiva, associada ao conceito de quadrado e à sua estruturação geométrica) e a consciência de que as diagonais e os eixos de simetria não são habitualmente usados na definição de quadrado apresentada nos manuais escolares (dificuldade de natureza meta-conceptual, associada ao conceito que as formandas têm sobre o que é uma definição em geometria). A ampla escolha de definições envolvendo elementos visíveis pode revelar uma tendência para aceitar como definições afirmações que contenham propriedades verdadeiras e/ou conhecidas ou facilmente reconhecíveis. Além disso, a escolha conjunta das opções A e B significa ainda que 86% das participantes parece não identificar qualquer conflito na existência de definições diferentes para o mesmo objeto, quando uma corresponde claramente a uma restrição da outra, o que aponta para uma conceção incorreta de definição. Finalmente, a escolha da opção D por mais de metade das formandas pode derivar de não se recordarem que as diagonais não têm de se intersetar sempre nos pontos médios (o que acontece para os quadriláteros mais familiares).

Uma análise mais detalhada do conjunto das opções escolhidas revela ainda os seguintes aspetos: a) apenas 4% das participantes identificaram exatamente as duas opções corretas; b) apenas 8% escolheram a definição B como única opção; e c) 32% escolheram todas as opções. Júlia é uma das formandas que assinala todas as opções, o que pode revelar alguma facilidade em reconhecer as propriedades das figuras mas, simultaneamente, uma conceção errada de definição que atende apenas ao requisito de que as propriedades enunciadas sejam necessárias.

Tarefa de definição de quadriláteros

Trabalho prévio

A tarefa sobre a definição de quadriláteros surgiu depois da investigação sobre as propriedades dos quadriláteros e da sua classificação. Uma vez que a definição depende em grande medida destas duas etapas, apresentamos sucintamente alguns resultados a ter em conta. Em primeiro lugar, durante a investigação das propriedades, as formandas mostraram alguma facilidade em identificar a congruência e paralelismo dos lados e diagonais; surgiram alguns erros na identificação dos eixos de simetria e a maioria inicialmente ignorou a forma como as diagonais se intersetam. Ainda nesta tarefa, realçamos dois aspetos: a maioria não recordava conceitos como diagonal de um polígono ou concorrência de retas e ignorou os casos particulares das classes de quadriláteros (por exemplo, quando o paralelogramo tomava a forma de um retângulo no ecrã). Em segundo lugar, o diagnóstico inicial revelou que apenas 1/3 da turma reconhecia a hierarquia entre o quadrado e o retângulo e, ainda assim, apenas algumas formandas sabiam justificá-lo. Durante a tarefa sobre classificação, as formandas estabeleceram relações entre os quadriláteros estudados conseguindo realizar uma classificação hierárquica entre o quadrado e o retângulo e entre este e o paralelogramo, justificando adequadamente a relação. Contudo, a classe dos papagaios revelou-se bastante mais difícil, com 58% a fazer uma classificação que não inclui o quadrado nesta classe (Brunheira & Ponte, 2015).

A tarefa seguinte centrou-se em três quadriláteros — o quadrado, o retângulo e o papagaio — com a construção de definições para as duas últimas figuras (Figura 3):

1. Considera as seguintes definições para quadrado, propostas por um grupo de futuros professores:

   Definição A: Quadrilátero com todos os lados iguais, paralelos dois a dois e todos os ângulos iguais.

   Definição B: Polígono com quatro lados e duas diagonais iguais.

   a. Parece-te que as definições são corretas?

   b. Alguma das definições é correta e económica?
2. Propõe duas definições diferentes para retângulo.
3. Propõe duas definições diferentes para papagaio.

Figura 3. Excerto da tarefa sobre as definições de quadriláteros

Definição de retângulo

A Tabela 4 apresenta uma análise quantitativa das definições apresentadas individualmente, classificadas em três categorias: definições económicas, definições corretas mas não económicas e definições incorretas. Foram produzidas 47 propostas para definições de retângulo (várias iguais), distribuídas da seguinte forma:

Tabela 4

Tipos de definições apresentadas para retângulo

	Definições económicas	Definições corretas não económicas	Definições incorretas
Frequências absoluta e relativa	7 (15%)	35 (74%)	5 (11%)

Uma vez que, à exceção de uma formanda, cada participante registou duas definições, interessa também saber que tipo de definições construíram e, em particular, se ambas são do mesmo tipo. Assim, das 24 formandas presentes, destacam-se 12 (50%) que registaram duas definições corretas (não económicas) e 7 (29%) uma correta (não económica) e outra económica, o que significa que a grande maioria (79%) construiu definições corretas, mas apenas uma parte conseguiu que uma delas fosse económica e nenhuma construiu duas definições económicas.

Vejamos alguns exemplos. Comecemos pela resposta de Maria João (Figura 4):

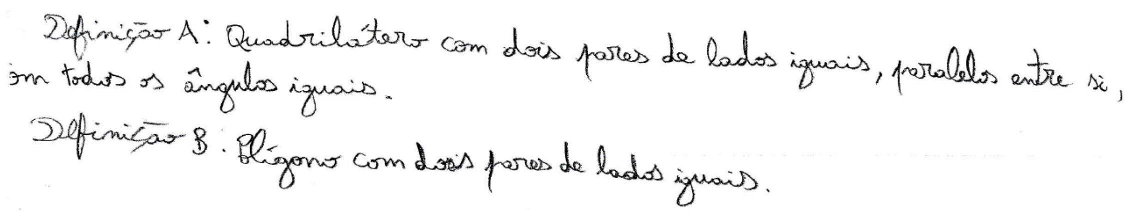

Definição A: Quadrilátero com dois pares de lados iguais, paralelos entre si, em todos os ângulos iguais.
Definição B: Polígono com dois pares de lados iguais.

Figura 4. Definições para retângulo propostas por Maria João

Maria João apresenta a definição A correta (não económica), mas a definição B está incorreta por apresentar uma condição necessária mas não suficiente, pois qualquer paralelogramo ou papagaio satisfazem a condição apresentada.

No que diz respeito às definições corretas mas não económicas, vejamos a resposta de Anabela (Figura 5) que é muito representativa das propostas de definição para retângulo:

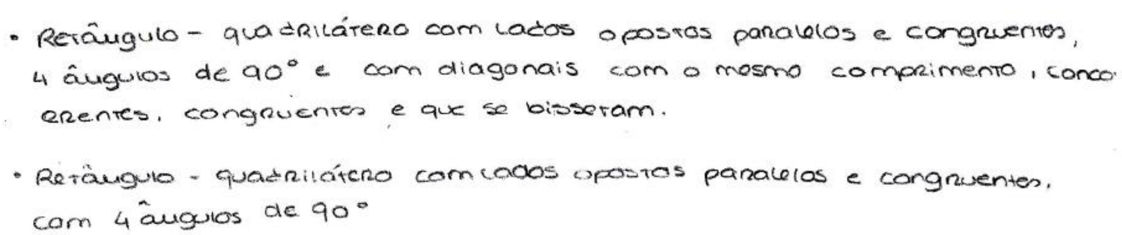

- Retângulo – quadrilátero com lados opostos paralelos e congruentes, 4 ângulos de 90° e com diagonais com o mesmo comprimento, concorrentes, congruentes e que se bissetam.
- Retângulo - quadrilátero com lados opostos paralelos e congruentes, com 4 ângulos de 90°

Figura 5. Definições de retângulo apresentadas por Anabela

Por um lado, ambas as definições referem os lados e os ângulos, o que acontece em quase todas as definições propostas pela turma, não havendo qualquer definição que se refira exclusivamente a elementos invisíveis. Por outro lado, a primeira definição corresponde a uma listagem quase exaustiva das propriedades estudadas e, a segunda, a uma restrição da primeira. Embora nenhuma das definições seja económica, a formanda evidencia a compreensão de que não é necessário apresentar todas as propriedades da figura.

As respostas de Lúcia (Figura 6), igualmente corretas mas não económicas, constituem um exemplo pouco comum de definições que não referem a congruência dos lados opostos do retângulo.

Definição A: Quadrilátero com 4 ângulos retos e duas diagonais iguais.
Definição B: Quadrilátero com 2 pares de lados paralelos 2 a 2 e 4 ângulos retos.

Figura 6. Definições de retângulo apresentadas por Lúcia

No que respeita às definições económicas, Jacinta apresenta duas (Figura 7, transcritas dada a insuficiente qualidade do original), uma primeira correta que recorre aos elementos comummente referidos (ângulos e lados) e uma segunda económica que traduz uma maior criatividade:

Definição A: Quadrilátero com quatro ângulos retos e lados opostos congruentes; Definição B: Quadrilátero com lados paralelos dois a dois e diagonais congruentes.

Figura 7. Definições de retângulo apresentadas por Jacinta

Terminamos com a resolução de Júlia (Figura 8) que é única por apresentar duas definições incorretas que incluem condições suficientes, mas não necessárias. Contudo, é de salientar que a incorreção resulta de um único problema — a não inclusão do quadrado como caso particular do retângulo, ou seja, as definições não são inclusivas.

2 A: Quadrilátero em que as diagonais são congruentes e bissetam-se mas não são perpendiculares.
B: Quadrilátero com todos os ângulos retos e com os lados opostos congruentes e paralelos, embora a dimensão de dois lados consecutivos não seja igual.

Figura 8. Definições para retângulo propostas por Júlia

Definição de papagaio

A Tabela 5 apresenta uma análise quantitativa das definições apresentadas individualmente. Foram produzidas 45 propostas para definições de papagaio (várias iguais), distribuídas da seguinte forma:

Tabela 5

Tipos de definições apresentadas para papagaio

	Definições económicas	Definições corretas não económicas	Definições incorretas
Frequência Absoluta	7 (16%)	7 (16%)	31 (69%)

No caso desta figura, considerando as duas definições de cada formanda, destaca-se que 11 (46%) construíram duas definições incorretas e 6 (25%) construíram uma definição correta (mas não económica) e uma incorreta.

Da comparação entre os resultados obtidos relativamente às definições de retângulo e os resultados relativos às definições de papagaio, resulta claramente o aumento das definições incorretas. O número de definições económicas mantém-se e o número de definições corretas mas não económicas reduziu-se drasticamente. Assim sendo, torna-se relevante analisar o tipo de erros cometidos pelas participantes.

Das 31 respostas incorretas, uma parte significativa (32%) corresponde a definições exclusivas. Contudo, a maior parte (perfazendo 58% das definições incorretas) corresponde a definições que são incorretas por corresponderem a condições que não são necessárias e/ou não são suficientes, além de serem exclusivas, pelo que não conduzem nem aos casos particulares, nem ao papagaio prototípico. As respostas de Júlia (Figura 9) são representativas deste grande grupo. Por um lado, persiste a intenção de que a definição não inclua casos particulares; por outro lado, as propriedades que apresenta não são suficientes, pelo que a formanda parece não estruturar convenientemente a figura em causa.

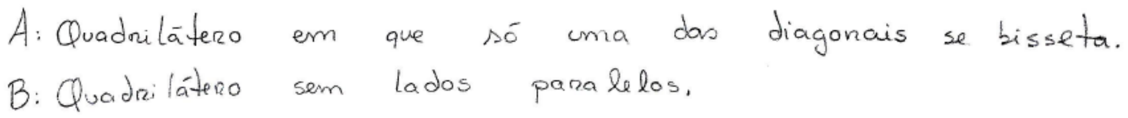

A: Quadrilátero em que só uma das diagonais se bisseta.
B: Quadrilátero sem lados paralelos.

Figura 9. Definições de papagaio apresentadas por Júlia

No que diz respeito às definições corretas mas não económicas, estas resultam sempre da conjunção da condição “quadrilátero com dois pares de lados consecutivos iguais” com outra condição, como “diagonais perpendiculares” ou “um par de ângulos opostos iguais”.

As definições económicas, embora em número reduzido, recorrem a três elementos diferentes: lados, eixos de simetria e diagonais. Jacinta apresenta a definição “Quadrilátero com um eixo de simetria que passa por dois vértices opostos” que preenche os requisitos de uma definição económica. Isabel apresenta outra definição (Figura 10) que carece de melhoria da linguagem, pela opção pela expressão “polígono com 4 lados” ao invés de quadrilátero. Contudo, a propriedade a que recorre é a mais comum na definição de papagaio e torna a definição económica.

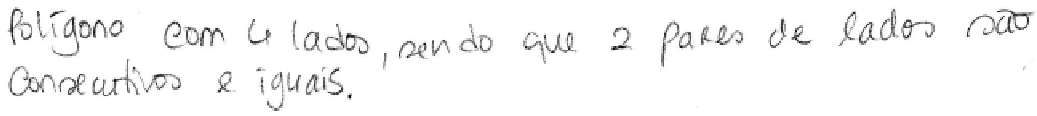

Polígono com 4 lados, sendo que 2 pares de lados são Consecutivos e iguais.

Figura 10. Definição de papagaio apresentada por Isabel

Em suma, a análise das definições produzidas pela turma para retângulo e papagaio mostram, em primeiro lugar, que o tipo de figura a definir tem uma grande influência no sucesso da tarefa. Se é verdade que, tanto para um caso como para outro, o número de definições económicas é muito reduzido, já o número de definições incorretas é muito maior no caso do papagaio.

Um aspeto que é notório na análise das produções de cada participante é que as formandas não se dividem pelo tipo de definições que produzem, ou seja, não existe o grupo das participantes que produzem definições económicas, o grupo das que produzem definições corretas e o grupo que produz as incorretas. De uma maneira geral, todas as participantes produzem mais do que um tipo de definição, até para o mesmo quadrilátero. Isto pode significar que não dominam o conceito de definição, mas pode também ser consequência de um domínio diferenciado sobre cada figura, em particular de uma estruturação insuficiente do papagaio. Verificamos assim que a aprendizagem deste processo não é linear, tal como acontece com o processo de classificação, o que é natural atendendo à sua interdependência. Aliás, o facto de a maioria das definições erradas de papagaio revelar problemas de inclusão, é mais um argumento a sugerir que esta aprendizagem está dependente de vários fatores, inclusivamente do tipo de propriedades envolvidas na definição.

Ainda no que respeita ao raciocínio, o papagaio é um quadrilátero que coloca desafios diferentes dos outros quadriláteros, o que já foi notado no processo de classificar. O facto de ser o único quadrilátero estudado em que a figura prototípica não tem os lados paralelos, leva a que várias formandas vejam a condição “quadrilátero sem lados paralelos” como sendo suficiente para o definir. Isto pode acontecer porque os exemplos de figuras que verificam a condição, mas não são papagaios, são quadriláteros não notáveis que estão habitualmente fora do universo dos quadriláteros em que os indivíduos pensam. Contudo, a forma como as formandas estruturam esta figura espacial e geometricamente tem um papel significativo. As propriedades relativas aos lados (paralelismo e dimensão relativa), bem como os ângulos, parecem ser muito marcantes na estruturação das figuras, o que no caso do retângulo apoia o raciocínio. Já para o papagaio, o paralelismo dos lados não se aplica a toda a classe, a identificação da congruência de lados fica dificultada por estes serem consecutivos e a relação entre os ângulos não apoia a definição. Assim, a construção de definições para papagaio suscita o recurso a outros elementos da figura, como os eixos de simetria, o que requer um domínio maior da linguagem matemática e de outros conceitos, o que requer operar no nível 2 de estruturação geométrica.

A discussão coletiva

A análise das definições construídas para o papagaio mostrou que produzir definições inclusivas pode constituir um obstáculo significativo. Nesta secção, procuramos compreender porquê a partir do raciocínio de Júlia patente durante a discussão coletiva. O episódio seguinte acontece quando Tita propôs a propriedade dos quadriláteros “todos os ângulos retos” como definição para retângulo. Nesse momento, Júlia intervém:

Júlia: Oh professora, eu não estou a perceber. Isso para mim também pode ser o quadrado...

Professora: Mas a definição para retângulo tem de ir incluir o caso do quadrado. Daí quando tu dizes que tanto dá para o retângulo como para o quadrado, ótimo! É isso mesmo que nós queremos!

Júlia: Sim, mas também tem de haver alguma coisa que os distinga!

Professora: Certo, mas é na definição de quadrado. Que são os 4 lados iguais. Estás a ver? Na definição de quadrado, eu tenho de acrescentar essa informação porque, de facto, o quadrado "vai mais além" do que um retângulo qualquer...

Júlia: Então, por exemplo, um trapézio tem de incluir os outros todos!

Professora: Pois tem!

Júlia: Então mas como é que eu vou distinguir umas figuras das outras?!

Professora: Distingues porque os casos particulares têm de ter mais propriedades do que os casos mais gerais...

Júlia: Então tenho de ir sempre aos outros...

Isabel: Isso para mim é muito estranho...

Neste diálogo, Júlia revela um grande desconforto com a aceitação de uma definição para retângulo que se resuma a "Quadrilátero com todos os ângulos retos". Contudo, mais do que a dificuldade em aceitar a relação entre o retângulo e o quadrado, o que revela é a sua estranheza perante as definições inclusivas e que é partilhada por outras colegas, como mostra a afirmação de Isabel. Para Júlia, uma definição tem de permitir identificar um único tipo de figura e não uma classe de figuras.

Depois de discutida a inclusão das figuras que pertencem à mesma classe, este critério passou a ser mais atendido. Quando foram analisadas as definições propostas para papagaio, um dos grupos propôs "Quadrilátero na qual apenas uma diagonal se bisseta", ao que uma das formandas retorquiu imediatamente dizendo "Não é inclusiva". Contudo, esta definição tinha outro problema:

Professora: Pois, exatamente... "Apenas uma das diagonais se bisseta", não pode ser... Mas olhem lá uma coisa, na definição B o problema não é só não ser inclusiva... O que é que acontece? [Silêncio]
Ela é suficiente para identificar um papagaio?

Mª João: Eu acho que sim...

Professora: Vamos imaginar que tiramos o "apenas". "Uma das diagonais bisseta a outra". [Silêncio]. Só há o papagaio?

Sandra: Se bisseta sim...

Professora: Então se eu colocar assim? Até vou pôr assim para se ver melhor. Isto é o ponto médio [Figura 11]. Estas diagonais são de um papagaio?

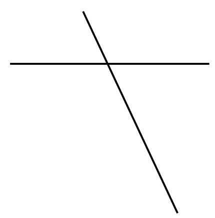


Figura 11. Figura desenhada no quadro conforme definição de papagaio

Neste momento da discussão, a turma não identificava outras figuras que correspondessem à definição sem serem papagaios. Esta dificuldade pode resultar de dois aspetos: por um lado, ao procurar visualizar figuras em que uma das diagonais bisseta a outra, os indivíduos colocam essas diagonais perpendiculares, sem que se apercebam de que estão a introduzir uma nova condição; por outro, sem desenhar, não é fácil imaginar um quadrilátero que corresponda à definição proposta e tenha diagonais oblíquas, uma vez que esta conjunção de condições resulta num quadrilátero não notável.

Tarefa de definição do paralelepípedo

A segunda tarefa relativa à construção de uma definição recaiu sobre o paralelepípedo. A escolha deste poliedro deve-se a, por um lado, permitir a apresentação de diferentes definições potencialmente ao alcance das formandas e, por outro, por haver uma analogia entre algumas das condições que definem este sólido e as que definem o paralelogramo — o paralelismo (e congruência) das faces acontece na figura tridimensional da mesma forma que o paralelismo (e congruência) dos lados surge na figura bidimensional. O pedido de uma definição económica poderia conduzir as formandas a raciocinar de modo a estruturarem espacialmente e geometricamente estes sólidos de modo a encontrarem relações entre os seus elementos, nomeadamente que se as faces de um prisma quadrangular forem paralelas duas a duas são também congruentes duas a duas e que a recíproca também é verdadeira.

Note-se que, antes desta proposta, as formandas realizaram um jogo em que precisaram de identificar o critério que permite distinguir os paralelepípedos de outros sólidos. Já nesta tarefa, tomaram contacto com a definição de prisma, analisaram as propriedades de vários prismas e distinguiram prismas retos de oblíquos. Assim, o item sobre a definição de paralelepípedo (Figura 12) apresenta algumas propriedades dos paralelepípedos já identificadas numa atividade anterior, de modo a apoiar o trabalho das formandas:

5. Os paralelepípedos pertencem também à classe dos prismas. Considera as seguintes propriedades anteriormente descobertas:

- Poliedro com seis faces;
- Poliedro com faces opostas iguais;
- Poliedro com faces paralelas duas a duas;
- Poliedro cujas faces são paralelogramos.

Apresenta uma definição para paralelepípedo (procura usar uma definição económica).

Figura 12. Excerto da tarefa sobre prismas

Estiveram presentes apenas 20 participantes, mas duas deixaram a questão por resolver. Desta forma, entre as 18 respostas, 2 correspondem a definições incorretas, 10 são definições corretas mas não económicas e 6 são económicas. Vejamos um dos casos de definições incorretas (Figura 13):


5) Um paralelepipedo é um prisma quadrangular reto ou oblíqua

Figura 13. Definição de paralelepípedo apresentada por Isabel

Isabel optou por construir uma definição que não utiliza as propriedades apresentadas no enunciado e mobiliza uma outra, que é verificada pelos paralelepípedos mas não é suficiente, uma vez que há prismas quadrangulares que não são paralelepípedos, bastando que o quadrilátero que se encontra na base não seja um paralelogramo.

No que diz respeito às definições corretas mas não económicas, apresentamos as definições construídas por Maria João (Figura 14) e Mónica (Figura 15):

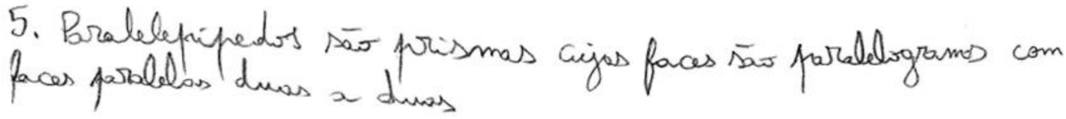

5. Paralelepipedos são prismas cujas faces são paralelogramos com faces paralelas duas a duas

Figura 14. Definição de paralelepípedo apresentada por Maria João

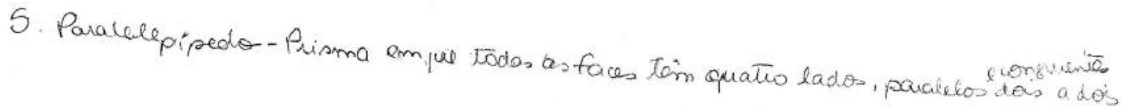

5. Paralelepípedo - Prisma em que tôdos as faces têm quatro lados, paralelos e congruentes dois a dois

Figura 15. Definição de paralelepípedo apresentada por Mónica

A propriedade “faces paralelas duas a duas”, apresentada por Maria João, é desnecessária pois a condição de que as faces sejam paralelogramos implica que sejam paralelas duas a duas. Do mesmo modo, a inclusão do termo “congruentes” na definição de Mónica é também desnecessária. As definições apresentadas são corretas mas não económicas, o que significa que falham no propósito de identificarem que algumas propriedades podem ser deduzidas de outras. Contudo, além de este objetivo ser mais difícil de alcançar no espaço do que no plano, a construção de definições económicas para objetos mais complexos pode não ser tão adequada quanto noutras situações já que, do ponto de vista da identificação da figura a partir da sua definição, é tanto mais difícil aceder-lhe quanto menor for o número de propriedades fornecidas. Este aspeto pode explicar a necessidade que, aparentemente, estas formandas sentem em apresentar propriedades que, apesar de desnecessárias, são estruturantes na organização espacial dos paralelepípedos.

Finalmente, apresentamos as definições construídas por Iva (Figura 16) e Marina (Figura 17) que são económicas:

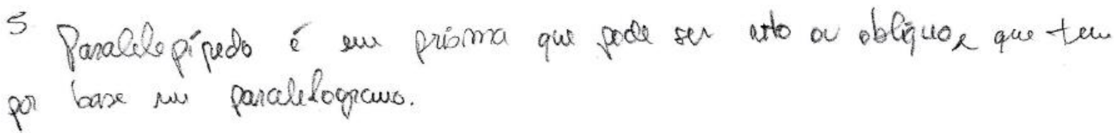

5 Paralelepípedo é um prisma que pode ser reto ou oblíquo, que tem por base um paralelogramo.

Figura 16. Definição de paralelepípedo apresentada por Iva

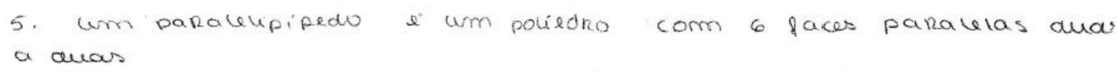

5. um paralelepípedo é um poliedro com 6 faces paralelas duas a duas

Figura 17. Definição de paralelepípedo apresentada por Marina

A definição de Iva recorre também ao conceito de prisma e inclui a informação que é reto ou oblíquo, o que não acrescenta nenhuma propriedade, mas esta formanda percebe que basta que a base do prisma seja um paralelogramo para que seja um paralelepípedo. Marina é das poucas formandas que usa a classe dos poliedros em vez dos prismas e inclui apenas duas propriedades que são necessárias e suficientes para que o sólido seja um paralelepípedo.

Finalmente, apresentamos a definição dada por Júlia (Figura 18) e que foi posteriormente discutida coletivamente.


Poliedro cujas faces são paralelogramos = Paralelepípedo

Figura 18. Definição de paralelepípedo apresentada por Júlia

Júlia:	Professora, e se dissermos só poliedro cujas faces são paralelogramos?
Professora:	Sem dizer que são seis?
Júlia:	Sim.
Professora:	Eu tenho dúvida em relação a isso. Tenho que ir pesquisar um pouco mais porque não tenho a certeza. O mundo dos poliedros é vastíssimo e eu não sei se existe um poliedro com essas condições

sem ser com seis faces. Se tiver obrigatoriamente seis faces, então de certeza que é um paralelepípedo.

De facto, para dar resposta a esta questão, a professora procurou pensar nos poliedros que conhecia e encontrar algum exemplo que verifique a condição sem ser um paralelepípedo, mas em vão. Sem a possibilidade de esgotar uma infinidade de casos, a estratégia mais acessível é conceber mentalmente um sólido com tais propriedades para perceber se necessariamente somos levados a construir um paralelepípedo. Esta tarefa é complexa mas Júlia e Lúcia envolvem-se nela e procuram convencer a professora de que se trata de uma condição suficiente:

Lúcia: Professora, mas um paralelepípedo tem de ter na base quatro arestas, certo? E para ligar essas 4 arestas à base oposta vamos ter de formar outras quatro arestas obrigatoriamente.

Júlia: Pois…

Professora: Então tu estás a dizer…

Lúcia: Se as bases não fossem paralelogramos…

Professora: Mas tu já estás a partir do princípio que existem bases e que o sólido está organizado dessa forma… [como um prisma]

Lúcia: Ah pronto…

Júlia: Mas professora, como eu digo que as faces são todas paralelogramos…

Professora: Pois eu percebi isso!

Lúcia: É que as faces podem estar dispostas de maneira diferente e não formar um paralelepípedo, percebes? [dirigindo-se a Júlia]

Professora: Pois, como te digo tenho de pesquisar mais um pouco, mas é uma questão muito interessante!...

Júlia: É que eu não estou a ver…

Professora: Pois, não estás a imaginar outra organização que não seja essa não é?!

Júlia: Pois!

Professora: É uma questão de irmos investigar mais um pouco… Tu também podes procurar! Com os quadriláteros é muito mais fácil ver se existem outros que cumprem a definição…

Nesta discussão, Lúcia usa um argumento que não é válido porque não está a considerar um poliedro qualquer, mas um prisma, o que não consta da sua definição. Numa pesquisa posterior encontrámos o dodecaedro rômbico que é apenas constituído por paralelogramos sem ser um paralelepípedo, logo a definição de Júlia é incorreta. Contudo, mais importante que validar a sua resposta, este episódio mostra que a procura de uma definição económica pode ser desafiante e incentivar as formandas a gerarem imagens mentais que respeitem as relações apresentadas, o que favorece a estruturação espacial e geométrica. Finalmente, esta definição mostra também que Júlia parece ter ultrapassado a dificuldade em aceitar definições inclusivas, já que a sua proposta inclui paralelepípedos retângulos.

Conclusão

No início da unidade curricular, a atividade de construir e analisar definições era completamente estranha às formandas. Mas o facto de nunca terem discutido o significado, requisitos ou importância de uma definição não significa que não tivessem conceções prévias sobre este conceito. Como com outros conceitos, as suas ideias foram sendo moldadas ao longo do tempo pela sua experiência de utilização de definições (Vinner, 1991), resultando numa noção difusa, com aspetos corretos e incorretos (Zaslavsky & Shir, 2005). Neste estudo, tal como em Zaskis e Leikin (2008), a construção de definições constituiu uma ferramenta de investigação para compreender o significado que os indivíduos atribuem às definições e aceder à sua compreensão sobre os conceitos definidos.

No que respeita aos requisitos a que uma definição deve obedecer, no início da unidade, as participantes consideravam uma definição válida sempre que a condição fosse necessária, sem ter em conta que esta deveria ser também suficiente. Além disso, não conheciam o conceito de definição inclusiva nem de definição económica, muito embora reconhecessem que uma definição de uma figura não apresenta necessariamente todas as suas propriedades. Já no âmbito do estudo dos quadriláteros, e depois de estabelecida a sua hierarquia, as definições inclusivas constituíram um desafio significativo para as formandas, em parte por considerarem que estas definições conduzem a ambiguidade. Porém, as atividades realizadas levaram a maioria a ter em conta que as definições das figuras que se encontram organizadas em classes devem ser inclusivas, como se verificou na tarefa de definição de paralelepípedo. Contudo, a aprendizagem relativa às definições económicas revelou-se mais problemática. Mesmo depois da apresentação e discussão do conceito, muitas formandas não o tiveram em conta ou não conseguiram produzir definições com este requisito.

Outra conclusão que destacamos diz respeito à influência mútua entre a estruturação espacial e geométrica e o processo de definir. Em primeiro lugar, a construção de definições económicas é influenciada pela necessidade de contemplar na definição as propriedades mais estruturantes nas figuras. Por exemplo, a propriedade "lados opostos iguais" do retângulo é muito estruturante para a maioria dos indivíduos, pelo que, mesmo sendo supérflua quando conjugada a condição "quadrilátero com quatro ângulos retos", é muito natural que seja incluída na definição desta figura. Esta tendência pode ter a ver com a perspetiva dita "didática" de que a definição deve ser intuitiva (Zaskis & Leikin, 2008). Em segundo lugar, o estudo mostra que o sucesso na construção de definições depende igualmente da figura a definir, nomeadamente dos elementos que servem para estruturar a figura, como mostrou a diferença de sucesso entre a construção de definições para retângulo e para papagaio. No caso desta figura, além da congruência dos pares de lados consecutivos, as definições alternativas mais viáveis envolvem as diagonais ou o eixo de simetria, que constituem elementos pouco familiares às formandas, como mostrou o diagnóstico inicial.

Os exemplos anteriores evidenciam que o processo de definir é influenciado pela forma como os indivíduos estruturam as figuras espacial e geometricamente. No entanto, como referem Freudenthal (1973), Mariotti e Fischbein (1997) e De Villiers (1998), a atividade de definir é também muito relevante do ponto de vista didático. Os resultados deste estudo sugerem que, além ser influenciada, esta atividade é também promotora da estruturação espacial e geométrica. O percurso de Júlia evidencia esta ideia. Quando confrontada com quadriláteros familiares, como o quadrado e o retângulo, reconhece as suas propriedades, incluindo as que envolvem diagonais e eixos de simetria e usa uma linguagem correta que incorpora adequadamente os conceitos envolvidos. Porém, a sua análise do papagaio revela maiores fragilidades, pois além da relação entre as diagonais, a formanda não identifica outra propriedade que possa usar para o definir. Nesta fase, as suas respostas são afetadas por uma conceção de definição limitada às definições exclusivas. Contudo, a partir do momento que entende e aceita a organização das figuras em classes e a consequente necessidade de definições inclusivas, Júlia parece desafiada pelo raciocínio subjacente a esta organização.

Além das conclusões anteriores, assinalamos um resultado um pouco divergente do que é afirmado por Zaskis e Leikin (2008). Segundo as autoras, quando uma definição apresentada é incorreta trata-se de uma manifestação de dificuldades de raciocínio lógico que podem resultar de uma compreensão limitada do conceito definido ou da própria noção de definição. Os nossos resultados confirmam esta afirmação, mas mostram outras *nuances*. Por exemplo, a condição "Quadrilátero em que uma diagonal bisseta a outra" que foi apresentada para definir papagaio não é correta, por ser insuficiente. Porém, várias formandas consideraram-na correta por não se aperceberem que existem outros quadriláteros nestas condições, uma vez que inconscientemente imaginavam as diagonais perpendiculares.

Desta forma, as conclusões apoiam a conjetura formulada no que respeita à promoção dos conhecimentos sobre a noção de definição, as figuras geométricas e o raciocínio. Quanto à sequência seguida, consideramos que a construção de definições no final da sequência sobre os quadriláteros constituiu uma forma de questionar a organização em classes anteriormente estabelecida. Na etapa anterior, as formandas pareciam já ter entendido a hierarquia entre algumas figuras e, apesar das dificuldades iniciais com os papagaios, estabeleceram que estes incluem outras figuras como os quadrados. A construção de definições acabou por constituir um "teste final" à aceitação destas relações, desafiando as formandas a considerarem a coerência da atividade de organização local de conceitos.

Concluímos assim que a construção de definições desafiou significativamente as participantes, que manifestaram algumas dificuldades na aceitação do caráter inclusivo das definições e, principalmente, na construção de definições inclusivas e económicas. No entanto, mais importante do que as definições produzidas, ressalta o contributo da experiência de formação para o conhecimento das propriedades das figuras e o desenvolvimento do raciocínio, sobretudo do ponto de vista da estruturação geométrica. A sequência que orientou o estudo dos quadriláteros, reservando o processo de definir para a fase final, promoveu a articulação entre as definições e a sua classificação, dois processos interdependentes que devem ser coerentes.

Referências

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2005). *A Matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM e SPCE.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Greenwich, CN: Information Age.

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry microworld. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (vol. *2*, pp. 131-56). Charlotte: Information Age.

Brunheira, L. & Ponte, J. P. (2015). A influência das representações na classificação de quadriláteros em futuras professoras e educadoras. In L. Santos (Ed.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 195-208). Bragança: SPIEM.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), D*esigning learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp.369-394). New York and London: Routledge.

De Villiers, M (2017). From a golden rectangle to golden quadrilaterals and beyond. *At right angles, 6*(1), 64-69.

De Villiers, M., Govender, R., & Patterson, N. (2009). Defining in geometry. In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 189-203). Reston, VA: NCTM.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht/Boston: Kluwer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 60-72.

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1999). Preservice primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*(3), 253-275.

Leighton, J. P. (2004). Defining and describing reason. In J. P. Leighton & R. J. Sternberg (Eds.) *The nature of reasoning* (pp. 3-11). Cambridge: Cambridge University Press.

Leikin, R. & Zazkis, R. (2010). On the content-dependence of prospective teachers' knowledge: a case of exemplifying definitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(4), 451-466.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and in the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mariotti, M. A. (1992). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspects. *Structural Topology, 18*, 9-18.

Mariotti, M. A. & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 219-248.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática, 100,*3-9.

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics education, 48*(5), 691-719.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais.* Lisboa: IIE.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Watson, A. & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4), 205-215.

Winicki-Landman, G. & Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions I. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 17-21.

Zaslavsky, O. & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 317-346.

Zazkis, R. & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131-148.

Agradecimentos

O presente artigo foi realizado no âmbito do projeto *O raciocínio geométrico e a visualização espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos* sedeado no Centro Interdisciplinar de Estudos Educacionais - referência ESEXL/IPL-CIED/2016/A12.

Anexo C. Artigo 3

<u>Versão dos autores</u>

Justificando generalizações geométricas na formação inicial de professores dos primeiros anos

Justifying geometrical generalization in elementary school preservice teacher education

Lina Brunheira

ESELX — Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Resumo. Este artigo enquadra-se numa experiência de formação com futuras professoras e educadoras do 2.º ano de uma Licenciatura em Educação Básica, desenvolvida em Portugal, em que estas produziram justificações de generalizações num contexto de ensino exploratório. O estudo tem como objetivo compreender a forma como justificam generalizações sobre famílias de figuras geométricas. Os dados foram recolhidos por registos áudio e vídeo e das produções escritas das formandas, focando-se nos argumentos usados para justificar generalizações sobre famílias de figuras. Na análise, mereceu especial atenção o tipo de argumentos, o seu grau de generalidade, as dificuldades manifestadas e os aspectos que promoveram a aprendizagem deste processo. Os resultados mostram que as formandas revelam algumas dificuldades em construir justificações, em parte pela incompreensão da natureza da justificação. Inicialmente manifestam dificuldades com o objeto de estudo (uma família de figuras em vez de uma figura única), e dificuldades na explicitação completa de argumentos e o seu discurso assenta sobretudo em casos particulares. A associação da justificação ao investigar o porquê da generalização, bem como a natureza e o desenho cuidado da tarefa e a interação na sala de aula podem potenciar a melhoria das justificações.

Palavras-chave: Geometria. Raciocínio. Justificação. Generalização. Formação inicial.

Abstract. This article is part of a teacher education experience implemented in Portugal with future teachers and educators of the 2nd year of a degree in basic education, in which they have produced evidence of justifications of generalizations in a context of exploratory teaching. The study aims to understand how they justify generalizations about families of geometric figures. Data were collected by audio and video records and from written productions of the participants, focusing on arguments used to justify generalizations about families of figures. In the analysis, special attention was given to the kind of arguments, its degree of generality, the difficulties expressed and the aspects that have promoted the learning of this process. The results show that the participants show some difficulties in building justifications, in part by the lack of understanding about the nature of the justification. Initially they expressed difficulties with the object of study (a family of figures instead of a unique figure) and difficulties in fully providing arguments and their discourse is based mainly on specific cases. The association of justification to investigate the why of the generalization, as well as the nature and the careful design of the task and the interaction in the classroom may promote the improvement of justifications.

Keywords: Geometry. Reasoning. Justification. Generalization. Preservcice Teachers Education.

1 Introdução

Nas últimas duas décadas tem havido um interesse crescente no raciocínio matemático que pode ser observado em documentos de orientação curricular como os *Princípios e normas da matemática escolar* (NCTM, 2007), onde se elege o raciocínio como uma das normas de processo centrais na experiência matemática desde a educação pré-escolar. Em Portugal, também o raciocínio matemático mereceu um especial destaque no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), como uma capacidade transversal que "envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas" (p. 8), devendo merecer uma grande atenção em todos os ciclos de ensino.

Também a investigação em educação matemática tem acompanhado o interesse sobre o raciocínio, especialmente no que respeita à argumentação e demonstração (HANNA, 2000; STYLIANIDES, 2007). Do ponto de vista dos temas matemáticos e níveis de escolaridade, como referem Stylianides, Bieda e Morselli (2016), a geometria continua a ser o campo mais profícuo para a investigação, particularmente no ensino secundário. Entre as linhas de investigação identificadas na última década, surgiram estudos centrados na sala de aula e que procuram encontrar formas de apoiar os alunos na argumentação e demonstração. Estes autores consideram que esta área beneficiaria com investigação que desenhasse ferramentas práticas, para utilização em sala de aula, baseadas em ideias teóricas. Já na área da formação de professores, consideram que o foco da investigação mantém a incidência na natureza do conhecimento sobre argumentação e prova sugerindo que

> é necessária mais investigação sobre o desenvolvimento do conhecimento matemático dos professores sobre argumentação e demonstração, com o desenho de intervenções que tenham explicitamente em conta a ideia de que um ensino eficaz de matemática requer que os professores tenham não apenas um bom conhecimento de matemática, mas sejam também capazes de usar flexivelmente esse conhecimento para apoiar a aprendizagem dos seus alunos. (STYLIANIDES, BIEDA, MORSELLI, 2016, p. 342)

O trabalho aqui apresentado surge justamente da necessidade sentida pela primeira autora, enquanto professora, em apoiar os futuros professores no seu raciocínio matemático, particularmente no que respeita ao processo de justificação em geometria. O seu objetivo é compreender a forma como justificam generalizações sobre famílias de figuras geométricas, analisando as seguintes questões: Que tipo de argumentos usam os futuros professores para justificar generalizações sobre famílias de figuras geométricas? Que dificuldades manifestam? Que atividades promovem o saber justificar e compreender a natureza da justificação?

2 Raciocínio matemático e justificação

Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012) indicam que dois processos de raciocínio centrais são generalização, onde sobressaem os aspectos indutivos, e a justificação, onde sobressaem os dedutivos. Numa perspectiva semelhante, Lannin, Ellis e Elliot (2011) afirmam que o raciocínio matemático é um processo evolutivo que inclui conjeturar, generalizar, *investigar porquê*, justificar e refutar. No que respeita à generalização, existem dois tipos de atividades: identificar pontos comuns em casos diferentes e estender uma afirmação além do domínio em que foi originada. *Investigar porquê* envolve a identificação de relações que permitem perceber por que uma afirmação é verdadeira ou falsa. Os autores entendem uma justificação válida como uma sequência lógica de afirmações, cada uma apoiando-se em conhecimento já estabelecido, de forma a chegar a uma conclusão. Este tipo de justificação deve conter linguagem geral que demonstre que se aplica a mais do que um caso particular, sem prejuízo de se poderem usar exemplos, mas que devem constituir exemplos genéricos. Esta definição de justificação inclui a redução ao absurdo, em que uma afirmação fica validada pelo facto de a sua negação ser falsa, que é muitas vezes a única razão que permite estabelecer que a afirmação é verdadeira. Contudo, em termos gerais, os autores consideram que, no âmbito do ensino, *investigar porquê* está intrinsecamente associado ao processo de justificar, na medida que "os alunos constroem justificações para se convencerem a si próprios e aos outros porque é que uma afirmação particular é verdadeira" (p. 35).

Esta visão da justificação inclui os papéis de validação e de compreensão de resultados e uma dimensão comunicativa que busca a legitimidade da atividade matemática — aspectos que associamos à demonstração. Na verdade, os conceitos de justificação e demonstração são muito próximos, o que deriva de a demonstração assumir vários significados, quer no âmbito da investigação em educação matemática (STYLIANIDES et al., 2016), quer em matemática, onde existem opiniões diversas sobre o seu papel e o que a torna aceitável (HANNA, 2000; HAREL & SOWDER, 2007). Tradicionalmente, o termo demonstração aparece associado a um elevado grau de formalismo e de complexidade próprios do ensino secundário ou superior, uma perspetiva contrariada por alguns autores que propõem um significado mais abrangente, embora nem sempre claro, para o termo demonstração. Por exemplo, Harel e Sowder (2007) assumem o carater *subjetivo* (itálico dos autores) da sua perspetiva, segundo a qual uma demonstração é aquilo que estabelece a verdade para uma pessoa ou uma comunidade, podendo permear todo o currículo de matemática, começando pelo jardim de infância. Tendo em vista conceptualizar a demonstração tendo também em conta os primeiros anos de escolaridade, Stylianides (2007) propõe uma definição fundada na literatura sobre filosofia da matemática e educação matemática:

> Uma demonstração é um argumento matemático, uma sequência de afirmações interligadas, a favor ou contra uma afirmação matemática, com as seguintes características: 1. Usa afirmações aceites na comunidade da sala de aula (um conjunto de afirmações aceites) que são verdadeiras e disponíveis sem justificação adicional; 2. Emprega formas de raciocínio (modos de argumentação) que são válidas e conhecidas, ou ao alcance conceptual, da comunidade de sala de aula; e 3. É comunicada usando formas de expressão (modos de representação de argumentos) que são apropriadas e conhecidas, ou ao alcance conceptual, da comunidade de sala de aula. (p. 291)

Neste estudo utilizamos o termo "justificação" com o significado aqui atribuído por Stylianides a "demonstração"[19], de forma incluir formas de argumentação com diferentes graus de formalidade e referentes a vários níveis de escolaridade.

[19] Em língua portuguesa, o termo "demonstração" está associado a uma conceção mais formal, pelo que optamos pelo termo "justificação" que se aproxima mais do conceito de Stylianides (2007).

3 Formação de professores e o processo de justificar

Lo e McCrory (2009) defendem que os futuros professores dos primeiros anos devem aprender a justificar e sobre justificação a três níveis: a) enquanto ferramenta para mostrar ou verificar a verdade de uma afirmação; b) enquanto objeto matemático que se regula por regras e padrões, tais como tornar os passos explícitos, basear-se em premissas e assumir caraterísticas ajustadas à respetiva comunidade; e c) enquanto fator de desenvolvimento dos alunos, dependente do seu nível de ensino, do conhecimento matemático que podem mobilizar, do tipo de argumentos que são capazes de formular e das representações que podem usar. Estes três níveis correspondem ao que as autoras indicam como *saber justificar*, *compreender a natureza da justificação* e *adaptar a justificação ao nível de desenvolvimento dos alunos*, sendo os dois primeiros associados ao conhecimento matemático e o terceiro ao didático. Para isso, as autoras sugerem que, na sua formação, os futuros professores se envolvam na produção de justificações, sendo estas discutidas focando vários aspectos, tais como os modos de raciocínio e representação utilizados, bem como erros típicos dos alunos.

Stylianides e Stylianides (2009) referem a existência de vários estudos que mostram que os futuros professores que lecionam os primeiros anos têm predominantemente ideias erradas sobre a justificação, particularmente sobre o papel dos argumentos empíricos, em alguns casos mesmo depois de terem tido formação sobre justificação. Também Lin et al. (2012b) referem que para muitos professores deste nível a sua convicção num resultado assenta mais na autoridade de entidades externas (como manuais ou colegas que reconhecem como mais competentes) do que no seu raciocínio, o que revela fraca autoconfiança na sua capacidade. Os autores referem que são em número reduzido os estudos que procuram desenvolver o conhecimento dos professores e futuros professores nesta área, e resumem assim as orientações dos estudos encontrados: resolver tarefas de justificação individualmente ou em pequenos grupos; realizar discussões coletivas; partilhar e criticar as justificações uns dos outros; promover desafios cognitivos e o estabelecimento de convicção nos resultados.

4 Justificar generalizações em geometria: construindo um modelo de análise

Para a análise dos dados, construímos um modelo sobre a justificação de generalizações em geometria procurando articular as ideias sobre o processo de justificar anteriormente revistas e o tópico matemático envolvido. Por um lado, o modelo deve captar em que medida a justificação apresentada pelos formandos cumpre o seu papel na sala de aula — convencer-se a si próprio e aos outros porque é verdadeira uma certa afirmação. Por outro lado, deve atender à sua validade, verificando se corresponde a um argumento ou conjunto de argumentos lógicos baseados em ideias previamente compreendidas, e se a linguagem e o raciocínio apoiam a relação geral, mostrando que se aplica a todos os casos do domínio considerado.

Atendendo a que o estudo incide sobre a justificação de generalizações para famílias de objetos geométricos, o quadro de análise atende à especificidade destes objetos e a natureza da atividade proposta, que se insere no âmbito do raciocínio geométrico. Nesse sentido, convocamos as ideias de Battista (2009) que afirma que operar mentalmente com objetos geométricos (por exemplo, compará-los, decompô-los e analisá-los) requer que estes tenham sido abstraídos a um nível suficientemente profundo. Para isso, há duas formas fundamentais de abstração em geometria—a *estruturação espacial* e a construção de *modelos mentais*:

> A estruturação espacial é o ato mental de organizar um objeto ou um conjunto de objetos através da identificação das suas componentes e do estabelecimento de relações entre elas. Os modelos mentais são versões não verbais, versões mentais das situações que captam a estrutura das situações que representam. (pp. 94-95).

Para o autor, o raciocínio envolve a ativação destes modelos mentais para que seja possível imaginar diferentes cenários e soluções para os problemas.

Desta forma, consideramos que a construção de justificações em geometria que permitam compreender a razão pela qual uma generalização é verdadeira é um processo que implica necessariamente a estruturação espacial dos objetos. Mais ainda, uma vez que uma justificação implica a explicitação de argumentos, é necessário ir além da dimensão mental a que se refere a estruturação espacial, entrando assim na estruturação geométrica que "descreve a estruturação espacial através de conceitos formais" (BATTISTA, 2007, p. 861). Isto significa que, ao estruturar geometricamente um objeto ou situação espacial, um indivíduo usa conceitos tais como congruência, paralelismo, ângulo, transformação geométrica ou sistema de coordenadas para conceptualizar e operar sobre a situação. A estruturação geométrica assenta na estruturação espacial, pois sem se apoiarem em modelos mentais que captem a estrutura da situação, a estruturação geométrica não tem significado para o indivíduo.

Assim, o modelo de análise das justificações sobre generalizações (Quadro 1) foca-se, em primeiro lugar, na natureza dos argumentos produzidos no que diz respeito à incidência na estruturação geométrica (EG) dos objetos. Interessa-nos compreender em que medida os futuros professores investigam a razão pela qual as generalizações são válidas recorrendo à forma como os objetos estão estruturados, ou seja, de que forma se compõem e como se relacionam as suas componentes. Em segundo lugar, procuramos compreender se o raciocínio apoia a relação geral mostrando que se aplica em todos os casos desse domínio (LANNIN et al., 2011), pelo que estabelecemos indicadores que, por um lado, evidenciam a natureza dos argumentos usados e, por outro, identificam o grau de generalização da justificação. Adotamos a aceção de "exemplo genérico" de Balacheff (1988) que "envolve tornar explícitas as razões da validade de uma afirmação através de operações ou transformações de um objeto que não é apresentado pelo seu valor próprio, mas como um representante característico da sua classe" (p. 219) sendo que "esta descrição envolve as propriedades e estruturas características da classe" (p. 219).

Tabela 1

Quadro de análise dos níveis das justificações de generalizações (Quadro elaborado pelos autores)

Nível	Descrição		
	Natureza do argumento	Propriedades/procedimentos	Grau de generalização
EG3	Com base na correta estruturação geométrica da família de figuras	Explicita propriedades relevantes e estabelecidas	Usa uma linguagem genérica sobre a família de figuras
			Incide sobre um exemplo genérico
			Incide sobre uma ou mais figuras da família sem generalizar
EG2	Com base numa estruturação geométrica incompleta da família de figuras	Explicita propriedades relevantes e estabelecidas, mas omite outras	Usa uma linguagem genérica sobre a família de figuras
			Incide sobre um exemplo genérico
			Incide sobre uma ou mais figuras da família sem generalizar
EG1	Com base numa estruturação geométrica incorreta da família de figuras	Explicita propriedades irrelevantes, inexistentes ou não estabelecidas	Usa uma linguagem genérica sobre a família de figuras
			Incide sobre um exemplo genérico
			Incide sobre uma ou mais figuras da família sem generalizar
EG0	Sem recurso à estruturação geométrica da família de figuras	Explicita relações numéricas sem relacionar com a estruturação das figuras	Incide sobre uma ou mais figuras da família
		Testa a generalização	Incide sobre uma ou mais figuras da família
		Recorre a uma fonte externa de validação (por exemplo, o GeoGebra, um colega ou um manual)	Não se aplica

5 Metodologia de investigação

Este estudo tem um propósito interventivo, visando modificar as práticas da formação inicial de professores e educadores, por forma a melhorar as suas aprendizagens e contribuir para o conhecimento sobre a sua formação, partindo da compreensão que construímos sobre a forma como os futuros professores desenvolvem o seu raciocínio geométrico. A investigação foca-se na aprendizagem em contexto, a partir da conceção de estratégias e ferramentas de ensino, pelo que optámos pela metodologia de investigação baseada em design, na modalidade de experiência de formação (COBB; CONFREY; DISESSA; LEHRER; SCHAUBLE, 2003; PONTE; CARVALHO; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2016) em que a professora (a primeira autora do artigo) tem também o papel de investigadora. Esta modalidade de investigação é referida por Stylianides et al. (2016) como sendo uma "abordagem promissora na resposta às necessidades de desenvolvimento de formas eficazes para abordar as dificuldades de alunos e professores relativamente à argumentação e demonstração" (p. 344).

Os dados que apresentamos foram recolhidos durante o segundo ciclo do estudo, no ano letivo de 2014/15, envolvendo uma turma de 25 formandas que frequentavam a disciplina de Geometria (2.º ano da Licenciatura em Educação Básica[20]). No primeiro ciclo do estudo, realizado no ano anterior com outros formandos, verificámos que a justificação do raciocínio era um processo em que revelavam ideias erradas, tais como usar dados com base na perceção das figuras. Contudo, verificámos que as dificuldades eram particularmente sentidas quando se tratava de justificar uma generalização, o que nos levou a dedicar maior atenção a este aspeto.

Neste artigo, os dados dizem respeito a duas tarefas: a primeira, incidente em figuras do plano, foi realizada em grupos de 4 ou 5 elementos, tendo cada participante feito um registo individual que, em muitos casos, refletiu simultaneamente a discussão do grupo e particularidades do raciocínio da sua autora; a segunda, incidente em figuras do espaço, integrou o teste de avaliação final e individual.

[20] Em Portugal, os futuros educadores de infância (dos 0 aos 5/6) anos e professores do 1.º ao 6.º ano (dos 6 aos 12 anos) começam por tirar uma licenciatura de três anos e depois um mestrado específico das áreas e dos anos em que vão ensinar. A disciplina tem uma duração de 15 semanas, implicando cerca de 67 horas em aula.

A primeira tarefa, aplicada na quarta semana, diz respeito à soma de ângulos internos de um polígono. Anteriormente, as formandas construíram vários polígonos no GeoGebra e obtiveram os valores das somas das amplitudes dos ângulos internos (180º, 360º, 540º…) a partir dos quais formularam uma generalização (obtendo várias expressões equivalentes e corretas). A tarefa que aqui apresentamos (Figura 1) tem como objetivo formular justificações para a generalização encontrada, já sem recurso ao *software*, correspondendo assim a uma *tarefa de transição entre conjetura e justificação*, de acordo com a classificação de Lin et al. (2012a), pois convida os alunos a justificar conjeturas que os próprios estabeleceram.

Na tarefa "Relações entre ângulos" encontraste uma generalização para a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer de n lados. Vamos procurar justificá-la. Para isso, observa as três figuras seguintes. Todas elas partem do mesmo hexágono, no qual se iniciou uma estratégia possível para chegar a justificação procurada. Usa uma das figuras e completa a justificação recorrendo ainda a outras relações que já tenhas estabelecido.

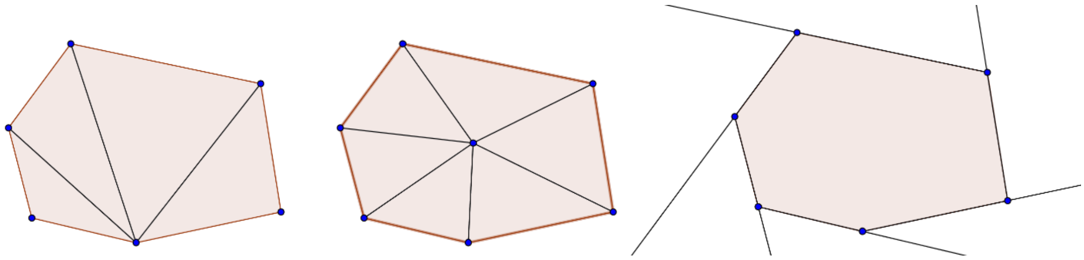


Figura 1. Tarefa para justificação da soma de ângulos internos de um polígono

Anteriormente, a justificação de afirmações já era solicitada, mas em situações em que eram fornecidos alguns valores numéricos (por exemplo, amplitudes de ângulos) e pedidos outros valores com base em propriedades estudadas. Na primeira tarefa sem valores específicos, realizada numa aula anterior, incidiu sobre a relação de congruência entre ângulos verticalmente opostos[21], tendo-se registado muitas dificuldades. Desta forma, a tarefa de justificação da generalização sobre a soma dos ângulos internos de um polígono de *n* lados foi a primeira que envolveu uma família de figuras, uma vez que os hexágonos apresentados são tanto representantes de uma infinidade de hexágonos como representantes de um qualquer polígono de *n* lados.

No que diz respeito à tarefa sobre a família de sólidos (Figura 2), inserida no teste final, pedia a generalização e justificação de relações entre alguns elementos (faces e vértices), o que as formandas já haviam realizado anteriormente para outras famílias,

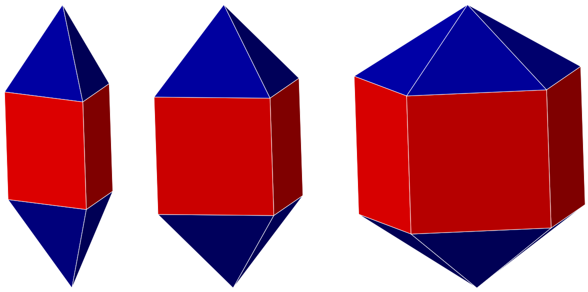
[21] A expressão "verticalmente opostos" significa, no Brasil, "ângulos opostos pelo vértice".

como prismas, pirâmides, antiprismas e alguns poliedros regulares e arquimedianos. Corresponde igualmente a uma *tarefa de transição entre conjetura e justificação* (LIN ET AL., 2012a).

No tempo que decorreu entre as duas tarefas aqui discutidas, a turma resolveu várias tarefas de *justificação,* mas sobretudo de *transição entre conjetura e justificação* que procuraram seguir os princípios de design referidos por Lin et al. (2012a). Entre esses princípios, destacamos o princípio relativo às normas de sala de aula que valorizam a partilha e discussão de ideias e que permitem encarar com naturalidade a apresentação de conjeturas, a sua aceitação ou rejeição. No que se refere estritamente às tarefas de *justificação,* foi dada especial atenção ao princípio sobre a classificação de afirmações matemáticas, incluindo o papel dos contraexemplos e a inadequação dos exemplos para validar uma generalização.

De uma maneira geral, o trabalho desenvolvido centrou-se nas dimensões *saber justificar* e *compreender a natureza da justificação* (LO & MCCRORY, 2009) e seguiu todas as orientações propostas por Lin et al. (2012b) anteriormente referidas. Além disso, o processo de justificar não foi ensinado como tópico independente, mas sim como processo de raciocínio abrangente e transversal e como uma forma de explicar ou compreender (STYLIANIDES & STYLIANIDES, 2009).

Na imagem estão representados três sólidos pertencentes a uma família de sólidos. Cada um destes sólidos é constituído por um prisma e duas pirâmides assentes em cada uma das bases do prisma. Se o prisma for triangular, as pirâmides também serão triangulares e assim sucessivamente para todos os sólidos.



A. Encontra uma expressão para o número de faces do sólido, considerando que n é o número de vértices da base do prisma. Justifica a expressão encontrada.
B. Encontra uma expressão para o número de vértices do sólido, considerando que n é o número de vértices da base do prisma. Justifica a expressão encontrada.

Figura 2. Tarefa para generalização e justificação do número de faces/vértices de uma família de poliedros

A recolha de dados foi feita a partir dos registos áudio e vídeo das aulas (para a primeira tarefa) e foi ainda realizada a análise documental das produções escritas. A análise de dados é feita a partir do modelo de análise apresentado na Tabela 1.

6 Resultados

6.1 Justificação da generalização para a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono

Nesta tarefa, as formandas trabalharam em grupos, mas cada uma fez o seu registo que, na maioria das vezes, correspondeu à resolução que foi discutida no grupo.

A fase inicial de trabalho não foi fácil pois, tal como na justificação da congruência de ângulos verticalmente opostos, nas figuras não constam quaisquer valores e algumas formandas pensaram que para chegarem à soma dos ângulos internos do polígono precisariam do valor de cada ângulo. Uma das formandas chegou a perguntar se não poderiam usar a medida 90º para um ângulo interno que parecia mesmo ser reto. A professora frisou então que deveriam prosseguir as estratégias iniciadas e que, para saber a soma, não precisamos de conhecer cada parcela. Progressivamente, os grupos foram avançando na atividade pretendida.

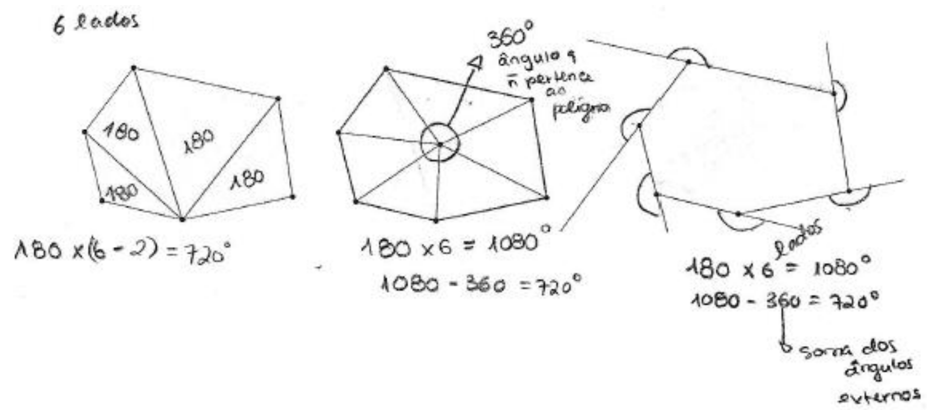
De seguida, apresentamos resoluções que ilustram o trabalho desenvolvido pelos grupos.

> *O primeiro hexágono está dividido em 4 triângulos. Todos os vértices de cada triângulo cobrem todos os ângulos internos do polígono. Se soubermos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, basta multiplicarmos 180 por 4 (4 triângulos) e conseguimos obter a amplitude de todo o polígono. A expressão que generaliza é (n-2)×180.*
> *Se um polígono tiver 10 lados, é possível desenhar 8 triângulos; se tiver 6 lados, desenhamos 4 triângulos. Se tiver n lados, desenhamos n-2 triângulos.*
>
> (Resolução de Célia da tarefa sobre a soma dos ângulos internos de um polígono)

A resposta de Célia parte da estratégia sugerida pela primeira figura. Baseia-se na correta estruturação geométrica da família de figuras pois identifica duas propriedades relevantes e já estabelecidas — a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo e a possibilidade de decompor o polígono em *n-2* triângulos cujos ângulos compõem os ângulos do polígono original. Célia usa o hexágono e ainda o decágono com a clara intenção de os tratar como exemplos genéricos, pois explicita propriedades que todos os elementos da classe possuem. Desta forma, podemos considerar que a sua justificação corresponde ao nível EG3.

Todos os grupos usaram a primeira figura para justificar a generalização, mas a maioria resolveu seguir também as outras estratégias. A resposta seguinte (Figura 3) pertence a Anita e é representativa do seu grupo. Note-se, porém, que a utilização da terceira figura surge a partir da discussão no seio do grupo onde Teresa explica a sua ideia às colegas:

> *Teresa: Estes todos dão 180º [os ângulos formados por cada ângulo interno juntamente com o externo]. Então 6×180. Mas os externos não queremos, estão a mais. Mas os externos todos juntos dão 360! Portanto, vamos ao 6×180 e tiramos os 360!*
>
> (Diálogo no grupo de Teresa, 2014)



Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º conseguimos descobrir a soma dos ângulos internos do polígono. Neste caso, conseguimos dividir este polígono em 4 triângulos, ou seja, se multiplicarmos 180 por 4 obtemos a soma dos ângulos internos do polígono.

Figura 3. Resolução de Anita da tarefa sobre a soma dos ângulos internos de um polígono

A resposta do grupo de Anita apoia-se numa correta estruturação geométrica, explicitando propriedades relevantes já estabelecidas (soma dos ângulos internos de um triângulo, o ângulo de 360º formado na segunda figura, a soma dos ângulos externos de um polígono e a relação entre um ângulo externo e um interno), sem explicar a relação entre o número de lados do polígono e o número de triângulos em que é decomposto. Fica implícito que a composição dos ângulos dos triângulos gera todos os ângulos do hexágono, uma relação que só é abordada para a figura central, onde o ângulo de 360º não é um ângulo do hexágono. Assim, a justificação apresentada explicita as propriedades mais relevantes mas omite outras, pelo que lhe atribuímos o nível EG2. Quanto ao grau de generalização, estas propriedades incidem apenas no caso do hexágono que não é tratado como exemplo genérico (o número de triângulos da decomposição é variável para a classe).

Outra resposta (Figura 4) pertence a um grupo que propôs a expressão *360 + 180 (n-4)* como generalização. Esta expressão não se relaciona diretamente com nenhuma das figuras apresentadas, pelo que as formandas usam outras expressões. A justificação de Isabel é sobretudo uma interpretação das expressões encontradas e não elabora um texto que articule as várias ideias. Contudo, o seu registo revela claramente que os seus argumentos se baseiam na estruturação geométrica, pois explicita quase todas as propriedades que são relevantes, omitindo a relação numérica entre o número de lados do polígono e o número de triângulos em que é decomposto e a sua justificação.

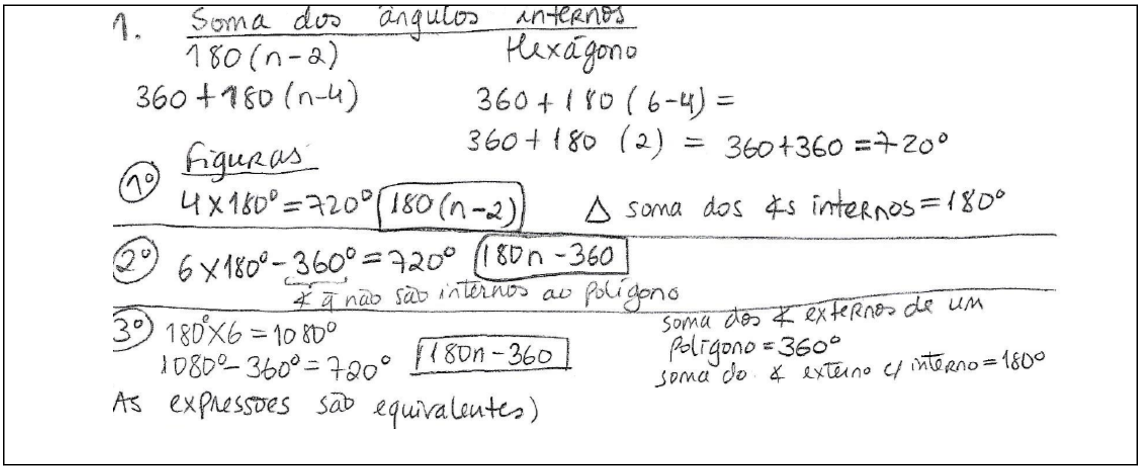

1. Soma dos ângulos internos
180(n-2) Hexágono
360+180(n-4) 360+180(6-4) =
360+180 (2) = 360+360 = 720°
figuras
1º 4×180° = 720° $\boxed{180(n-2)}$ △ soma dos ∡s internos = 180°
2º 6×180° − 360° = 720° $\boxed{180n-360}$
∡ q não são internos ao polígono
3º 180°×6 = 1080°
1080° − 360° = 720° $\boxed{180n-360}$
soma dos ∡ externos de um polígono = 360°
soma do ∡ externo c/ interno = 180°
As expressões são equivalentes)

Figura 4. Resolução de Isabel da tarefa sobre a soma dos ângulos internos de um polígono

Nesta resposta, o hexágono é usado como um exemplo que ilustra e explica as expressões utilizadas, mas não há uma explicação no sentido de o tornar claramente num exemplo genérico, apesar de a formanda explicitar as propriedades comuns à classe. Esse aspeto foi abordado pela professora junto do grupo:

Professora: Sim, mas esse caso será para o hexágono. E se tivermos outros polígonos? Por exemplo, com 10 lados?
Isabel: Fazemos… 8 triângulos. Tiramos dois aos lados.
Professora: E então?
Isabel: Exato. Então dá (n-2) × 180!
Andreia: E para o outro [figura do meio] fazemos 6×180 e tiramos depois dois triângulos. 2×180.
Professora: E porque é que tiras os ângulos de dois triângulos?
Isabel: Pois… Isso és tu a forçar para dar igual…
Professora: É isso. Têm de ver que se tiverem que tirar alguma coisa, algum valor, isso tem de fazer sentido…

(Diálogo no grupo entre a professora e duas formandas, 2014)

Este diálogo mostra que as formandas estavam conscientes da relação entre o número de lados do polígono e o número de triângulos da decomposição (para o caso da primeira figura), mas não o explicitaram no seu registo.

Pelas razões indicadas, consideramos que esta justificação corresponde ao nível EG2, com uma linguagem que incide apenas sobre uma das figuras da família. Além disso, salientamos que este grupo parece querer corresponder ao desafio da professora de dar sentido às expressões utilizadas, o que corresponde a uma visão da justificação como explicação do porquê. Este aspeto é percetível no seu registo, mas particularmente no discurso de Isabel, quando diz que tirar dois triângulos é "forçar para dar igual".

6.2 Justificação de generalizações sobre relações entre elementos de uma família de poliedros

A tarefa sobre a família de poliedros (Figura 2) integrou o teste de avaliação individual da turma realizado na última semana de aulas. Foram propostas duas versões, ambas incidentes numa família infinita de sólidos[22] — a versão A incide sobre o número de faces e a versão B sobre o número de vértices. Ao contrário da tarefa sobre a soma de ângulos internos de polígonos, as formandas não conheciam a expressão geral para o número de faces/vértices dos sólidos que era também pedida.

No caso desta tarefa, uma vez que foi realizada individualmente, apresentamos os dados quantitativos relativos ao tipo de justificações apresentadas (Tabela 2). Estes dados mostram que, das 25 formandas que realizaram o teste, 19 (76%) apresentaram generalizações corretas, mas as suas justificações são de diferente tipo.

Tabela 2

Distribuição dos níveis das justificações de generalizações

Nível	EG3	EG2	EG1	EG0		Generalização errada
				Usa relações numéricas	Testa a expressão	
Freq. Absol.	3	8	1	3	4	6
%	12	32	4	12	16	24

Fonte: elaborado pelos autores

[22] Esta família de sólidos foi adaptada das bipirâmides alongadas, uma subclasse dos sólidos de Jonhson com três sólidos apenas. Para estes sólidos retiramos a restrição de que todas as faces sejam polígonos regulares.

De seguida, apresentamos e analisamos justificações que se restringem às generalizações corretas e que ilustram diferentes tipos de raciocínio. Começamos pela resposta de Júlia (Figura 5) sobre o número de faces da família (questão A) que apresenta uma justificação que consideramos completamente correta. Esta formanda estrutura cada sólido como a junção de três sólidos que já conhece e explicita propriedades relevantes e estabelecidas anteriormente, como o número de faces laterais ser o mesmo que o número de vértices da base, quer nas pirâmides, quer nos prismas. Júlia é das poucas participantes que explicita que as faces destes sólidos correspondem apenas às faces laterais dos prismas e das pirâmides que os compõem, por via da junção das suas bases. Note-se ainda que o seu discurso não é específico de casos particulares da família, aplicando-se a todos os sólidos. Desta forma, consideramos que Júlia apresenta uma justificação de nível EG3, usando uma linguagem genérica sobre a família de sólidos.

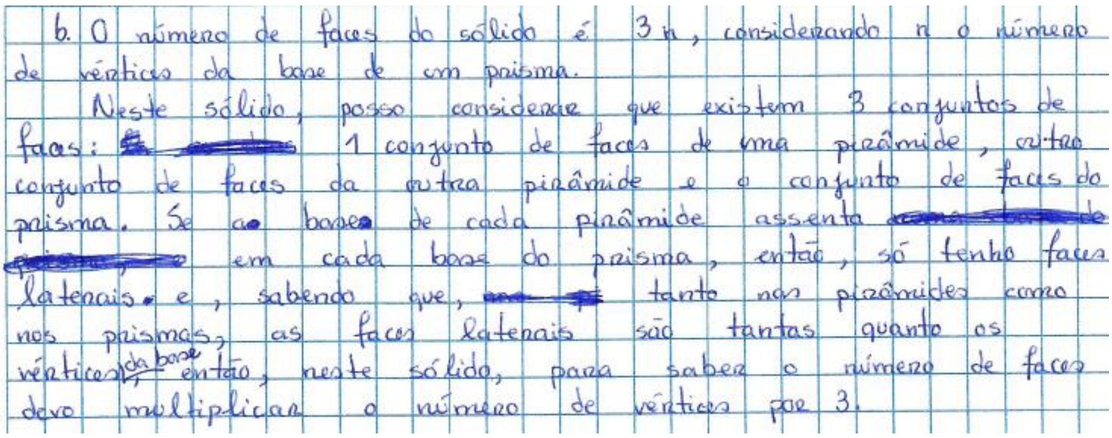
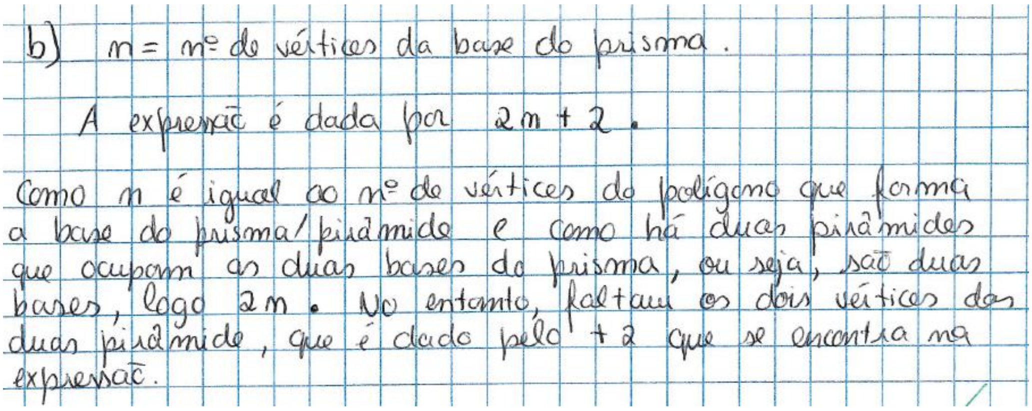

b. O número de faces do sólido é 3n, considerando n o número de vértices da base de um prisma.
Neste sólido, posso considerar que existem 3 conjuntos de faces: 1 conjunto de faces de uma pirâmide, outro conjunto de faces da outra pirâmide e o conjunto de faces do prisma. Se a base de cada pirâmide assenta em cada base do prisma, então, só tenho faces laterais e, sabendo que, tanto nas pirâmides como nos prismas, as faces laterais são tantas quanto os vértices da base, então, neste sólido, para saber o número de faces devo multiplicar o número de vértices por 3.

Figura 5. Resolução de Júlia da tarefa sobre o número de faces da família de sólidos

Analisemos agora a resolução de Lúcia (Figura 6) sobre o número de vértices desta família (questão B). A formanda faz uma correspondência dos vértices do sólido aos vértices das pirâmides, o que está correto pois todos os vértices destas são vértices do sólido. Contudo, deveria explicitar a razão pela qual os vértices dos prismas já foram contemplados por esta contagem, ou seja, explicita propriedades relevantes mas omite outras. Assim, consideramos que Lúcia apresenta uma resposta de nível EG2 e, tal como Júlia, o seu discurso é genérico relativamente à família de sólidos.



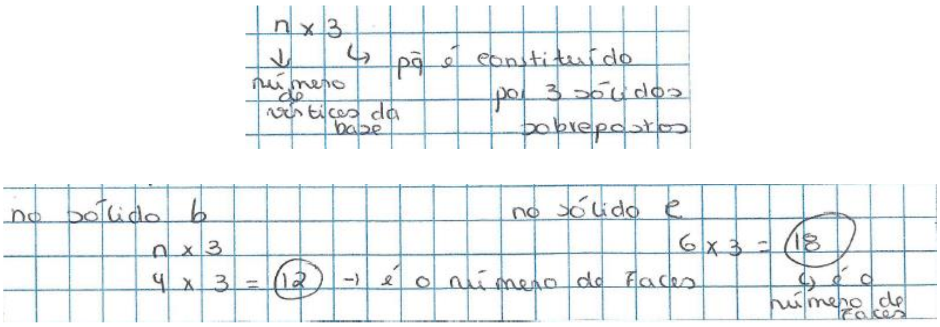
b) n = nº de vértices da base do prisma.

A expressão é dada por 2n + 2.

Como n é igual ao nº de vértices do polígono que forma a base do prisma/pirâmide e como há duas pirâmides que ocupam as duas bases do prisma, ou seja, são duas bases, logo 2n. No entanto, faltam os dois vértices das duas pirâmide, que é dado pelo + 2 que se encontra na expressão.

Figura 6. Resolução de Lúcia da tarefa sobre o número de vértices da família de sólidos

Teresa apresenta uma generalização sobre o número de faces das bipirâmides (questão A) composta por duas partes: a primeira, onde indica a expressão com uma justificação dos seus parâmetros e, em particular, da razão pela qual surge o valor 3 (porque é constituído por 3 sólidos sobrepostos); a segunda, onde testa a expressão para dois casos, assumindo que a segunda figura tem uma base quadrangular e a terceira hexagonal (Figura 7).



n x 3

número de vértices da base

pq é constituído por 3 sólidos sobrepostos

no sólido b

n x 3

4 x 3 = 12 → é o número de faces

no sólido e

6 x 3 = 18

é o número de faces

Figura 7. Resolução de Teresa da tarefa sobre o número de faces da família de sólidos

A resposta de Teresa parece indicar que estrutura espacialmente as bipirâmides como a junção de três sólidos, o que está correto. No entanto, esta propriedade é irrelevante se não tivermos em consideração que o número de faces que contamos em cada um dos três sólidos é o mesmo. Teresa testa ainda a sua expressão, possivelmente para lhe atribuir uma maior fiabilidade. Desta forma, atribuímos dois níveis à justificação que apresenta: o nível EG2, correspondente a uma justificação baseada numa estruturação geométrica incompleta e onde usa uma linguagem genérica sobre a família de figuras, e o nível EG0, por via da justificação com base em testes. Esta duplicação dos níveis significa que a formanda parece ter uma ideia de que a sua justificação deve integrar a forma como o sólido se encontra estruturado, mas considera a sua argumentação insuficiente e reforça-a com testes à generalização.

A estratégia de realizar testes à conjetura foi utilizada por outras formandas, como Iva (Figura 8). A formanda justifica a sua generalização aplicando-a à primeira figura apresentada na tarefa e explicando que, por contagem, se verifica que o valor obtido (9) coincide com o resultado da expressão. Refere ainda que o número de faces para os outros sólidos cumpre a expressão. Desta forma, a formanda não faz referência às propriedades dos sólidos, apenas justifica a sua conjetura com um teste, pelo que atribuímos o nível EG0 à sua justificação.

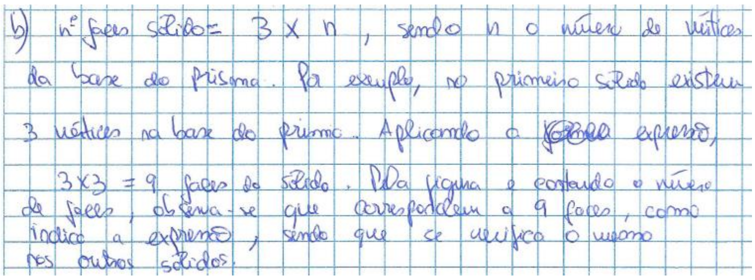

b) nº faces sólido = 3 x n , sendo n o número de vértices da base do prisma. Por exemplo, no primeiro sólido existem 3 vértices na base do prisma. Aplicando a expressão,
3x3 = 9 faces do sólido. Pela figura e contando o número de faces, observa-se que correspondem a 9 faces, como indica a expressão, sendo que se verifica o mesmo nos outros sólidos.

Figura 8. Resolução de Iva da tarefa sobre o número de faces da família de sólidos

Finalmente, consideremos a resolução de Cristina (Figura 9). Ao contrário das respostas anteriores, a formanda apresenta a generalização apenas no fim da sua resposta. Aparentemente, a sua justificação acaba por corresponder ao processo pelo qual a formanda chega à generalização — a partir das relações numéricas que identifica entre o número de vértices e o número de faces em três sólidos da família, sem qualquer referência a propriedades geométricas. Desta forma, Cristina apresenta uma justificação à qual atribuímos o nível EG0.

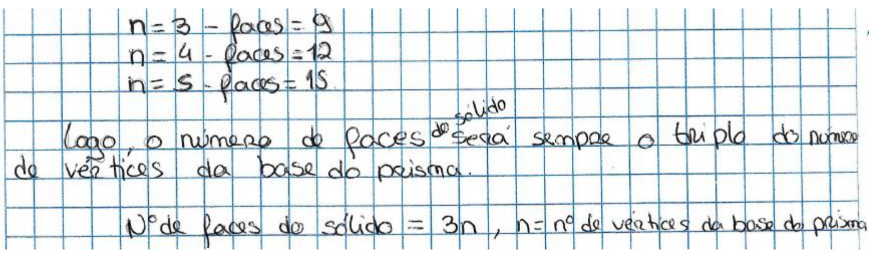

n = 3 - faces = 9
n = 4 - faces = 12
n = 5 - faces = 15
Logo, o número de faces do sólido será sempre o triplo do número de vértices da base do prisma.
Nº de faces do sólido = 3n , n = nº de vértices da base do prisma

Figura 9. Resolução de Cristina da tarefa sobre o número de faces da família de sólidos

Sintetizando, as respostas desta tarefa individual mostram que apenas cerca de 40% das formandas deram uma justificação completa ou quase completa recorrendo à estruturação geométrica (não considerámos neste grupo a resposta de Teresa que só apresenta uma propriedade). Os casos em que atribuímos o nível EG2 correspondem a respostas em que o modelo mental da família de figuras é claramente correto, mas as formandas acabam por omitir alguma(s) propriedade(s) que até podem ter tido em conta, mas não as explicitam, o que torna a justificação incompleta. Um aspeto curioso diz respeito às justificações que se apoiam nas regularidades numéricas e que são todas referentes à questão sobre o número de faces, cuja expressão é $3n$, e não sobre o número de vértices, cuja expressão é $2n+2$. Embora o número de respostas não seja muito expressivo, podemos conjeturar que as generalizações que correspondem a regularidades numéricas mais facilmente reconhecíveis (como é o caso dos múltiplos de 3) sugerem uma abordagem à justificação com base nessa regularidade, talvez por ser mais acessível ou por ser a forma como as formandas chegaram à expressão.

7 Discussão

Os resultados obtidos na tarefa sobre a soma dos ângulos internos de um polígono mostram que as formandas estavam ainda no início da aprendizagem sobre a justificação de generalizações, o que se manifestou sobretudo em dois momentos: no momento inicial, em que revelaram dificuldades por não serem apresentados quaisquer valores; no momento do registo, em que mostraram dificuldades ou resistência em construir um discurso argumentativo, baseado nas propriedades das figuras. Além disto, é ainda de sublinhar a tendência para referir apenas o caso do hexágono que apenas algumas resoluções tratam como exemplo genérico. Assim, esta tarefa revelou dificuldades relacionadas com dois fatores: a natureza da afirmação a justificar — uma generalização — que se apoia numa representação genérica (referente a uma família de figuras em vez de uma figura única) onde não surgem quaisquer valores; os princípios de uma justificação, nomeadamente a necessidade de explicitar adequadamente os argumentos, usando uma linguagem geral que se aplica a mais do que um caso particular (LANNIN et al., 2011). Isto significa que as formandas revelaram dificuldades quer sobre *saber justificar*, quer sobre *compreender a natureza da justificação* (LO & MCCRORY, 2009).

Contudo, esta tarefa revelou também aspectos positivos. O seu enunciado permite *investigar o porquê* através do confronto e mobilização de diferentes representações e propriedades, o que conduziu a discussões sobre o significado das generalizações. Não houve qualquer sinal de que a resolução da tarefa estabelecesse a validade das generalizações que as formandas nunca colocaram em causa, pelo que a justificação ficou claramente associada à compreensão da razão da sua validade. Outro aspeto positivo a assinalar é que todas as resoluções envolvem uma correta estruturação geométrica da família de figuras, pelo que as justificações são válidas ou contêm argumentos válidos e pertinentes, mesmo que incompletas.

A tarefa sobre as relações entre elementos da família de poliedros revelou alguns aspectos comuns, mas outros significativamente diferentes. No que diz respeito às dificuldades, à exceção das três participantes que não resolveram a tarefa (por motivos que desconhecemos), as resoluções não se fixam tanto na análise de um exemplo particular, havendo várias respostas que usam uma linguagem genérica sobre a família de figuras. Contudo, 28% das participantes não recorre à estruturação geométrica, usando como argumentos o teste da expressão numérica para alguns casos ou a identificação de regularidades numéricas. De novo, estes problemas dizem respeito à dimensão *compreender a natureza da justificação* (LO & MCCRORY, 2009), mas de uma forma diferente. Quanto à dimensão *saber justificar*, algumas formandas conseguem mostrar a validade da generalização, através da construção de uma argumentação completa ou quase completa, baseada em propriedades relevantes e estabelecidas.

Assim, no que respeita ao tipo de argumentos usados pelas participantes para justificar generalizações, há uma diferença entre as duas tarefas. Na tarefa sobre os polígonos, todas as resoluções recorrem à estruturação geométrica das figuras através de propriedades relevantes e estabelecidas, embora o grau de generalização seja tendencialmente reduzido. Na tarefa dos poliedros, há uma parte considerável de formandas que não recorre à estruturação geométrica, realizando antes testes ou explicitando uma regularidade numérica, o que pode ter sido favorecido pela simplicidade e familiaridade com a sequência (os múltiplos de três).

A comparação dos desempenhos nas duas tarefas apresentadas leva-nos a considerar também a diferença entre a sua formulação e o contexto em que foram resolvidas. Por um lado, o facto de todas as justificações da tarefa dos polígonos recorrerem à estruturação geométrica pode ter sido promovido pelas estratégias já iniciadas no próprio enunciado, algo que não aconteceu com a tarefa dos poliedros. Também o facto de ter sido resolvida em pequenos grupos gerou interação entre as formandas e entre estas e a professora que, como percebemos pelos diálogos, podem conduzir a um questionamento que favorece a compreensão do porquê de a afirmação ser válida. Por outro lado, na tarefa dos poliedros existem três representações de elementos da família, ao contrário do único hexágono presente na primeira tarefa, o que pode ter promovido um raciocínio mais abrangente, em vez de se focar num único caso.

Finalmente, o facto de ser a última tarefa e ser realizada num contexto avaliativo pode ter favorecido uma construção da justificação mais cuidada, com atenção à melhor explicitação dos argumentos.

8 Conclusão

No que respeita à natureza dos argumentos usados, a perspetiva de justificar para compreender o porquê da validade de uma afirmação pareceu bem integrada pelas participantes que, na maioria dos casos, se basearam em propriedades relevantes e já estabelecidas, envolvendo uma correta estruturação geométrica, que resultaram em justificações válidas ou contendo argumentos válidos e pertinentes. No que respeita a dificuldades, identificámos os seguintes fatores: a natureza da afirmação a justificar que se apoia numa representação genérica; os princípios de uma justificação, nomeadamente a explicitação dos argumentos; tendência para argumentar com base em regularidades numéricas, ou seja, sem recurso à estruturação geométrica, nos casos em que a generalização está associada a uma sequência simples.

No que respeita às atividades que promovem o *saber justificar* e *compreender a natureza da justificação*, o facto de o enunciado sugerir a justificação recorrendo a raciocínios diferentes, parece apoiar a utilização de argumentos com base na estruturação geométrica. Por outro lado, a representação no enunciado de vários elementos da família de figuras, pode promover uma linguagem mais geral, em vez de se focar em casos particulares. Finalmente, a valorização da partilha e discussão de ideias, conduz a um questionamento que favorece a compreensão do porquê de a afirmação ser válida.

Podemos assim afirmar que a experiência realizada mostra a necessidade de reforçar o trabalho quer na dimensão *saber justificar*, quer na dimensão *compreender a natureza da justificação* (LO & MCCRORY, 2009). Em particular, é necessário vencer a resistência em construir um discurso argumentativo, que observamos em resoluções que se reduzem à interpretação esquemática de expressões ou representações visuais, por forma a valorizar a dimensão comunicativa deste processo (YACKEL E HANNA, 2003). É também importante elevar o grau de generalidade do discurso que, nalguns casos, é demasiadamente apoiado em exemplos particulares e não evidencia que a generalização se aplica a todo o domínio de figuras, um requisito da justificação (LANNIN et al., 2011). Na verdade, existe uma linha pouco definida entre apresentar um exemplo genérico que seja representativo do domínio — uma estratégia apropriada para justificar — e apoiar a justificação em exemplos que valem apenas por si próprios — o que corresponde a um erro associado a uma conceção errada comum sobre o papel dos resultados empíricos na validade de uma justificação (STYLIANIDES & STYLIANIDES, 2009). Consideramos ainda importante insistir no papel da justificação enquanto ferramenta que permite compreender o porquê (HAREL & SOWDER, 2007; LANNIN et al., 2011; STYLIANIDES et al., 2016) e, consequentemente, perceber que a realização de testes ou outros processos que não se baseiem nas propriedades das figuras, não estabelecem a validade nem cumprem tal papel. Finalmente, este estudo sugere ainda que o desenho de tarefas que promovam a produção e confronto de diferentes justificações e representações, num ambiente de interação entre pares, é um elemento determinante no desenvolvimento da capacidade de justificar.

Referências

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In: PIMM, D. (Ed.). **Mathematics, teachers and children**. London, UK: Hodder & Stoughton, 1988. p. 216-238.

BATTISTA, M. T. The development of geometric and spatial thinking. In: LESTER, F.K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Greenwich, CT: Information Age, 2007. p. 843-908.

BATTISTA, M. T. Highlights of research on learning school geometry. In: Craine, T.V.; R. RUBENSTEIN (Eds.). **Understanding geometry for a changing world**. Reston, VA: NCTM, 2009. p. 91-108.

COBB, P., CONFREY, J., DISESSA, A., LEHRER, R., & SCHAUBLE, L. Design experiments in educational research. **Educational Researcher**, Washington, DC, v. 32, n.1, p. 9-13, 2003.

HANNA, G. Proof, explanation, and exploration: An overview. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, Holanda, n. 44, p. 5-23, 2000.

HAREL, G.; SOWDER, L. Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In: Lester, F.K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Greenwich, CT: Information Age, 2007. p. 805-842.

LANNIN, J.K.; ELLIOTT, R.; ELLIS, A.B. **Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

LIN, F.L.; YANG, K.L.; LEE, K.H.; TABACH, M.; STYLIANIDES, G. Principles of task design for conjecturing and proving. In: G. HANNA, G.; DE VILLIERS, M. (Eds.). **Proof and proving in mathematics education, new ICMI study series 15**. Dordrecht, Holanda: Springer, 2012a. p. 305-325.

LIN, F.L.; YANG, K.L.; LO, J.J.; TSAMIR, P.; TIROSH, D.; STYLIANIDES, G. Teachers' professional learning of teaching proof and proving. In: G. HANNA, G.; DE VILLIERS, M. (Eds.). **Proof and proving in mathematics education, new ICMI study series 15**. Dordrecht, Holanda: Springer, 2012b. p. 327-346.

LO, J.; MCCRORY, R. Proof and proving in mathematics for prospective elementary teachers. In: LIN, F.L.; HSIEH, F.J.; HANNA, G.; DE VILLIERS, M. (Eds.). **ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education**. Taipei, Taiwan: Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, 2009. v. 2, p. 41-46.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Lisboa: APM, 2007.

PONTE, J.P.; CARVALHO, R.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, Lisboa, v. 25, n.2, p. 77-98, 2016.

PONTE, J.P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. **Praxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 355-377, jul./dez. 2012.

PONTE, J.P.; SERRAZINA, L.; GUIMARÃES, H.; BREDA, A.; GUIMARÃES, F.; SOUSA, H.; MENEZES, L.; MARTINS, M.E.; OLIVEIRA, P. **Programa de Matemática do ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação/Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular, 2007.

STYLIANIDES, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, n. 38, p. 289-321, 2007.

STYLIANIDES, A.J., BIEDA, K. N.; MORSELLI, F. Proof and argumentation in mathematics education research. In: Gutiérrez, A.; Leder, G.C.; Boero, P. (Eds.). **The second handbook of research on the psychology of mathematics education**. Rotherham, Holanda: Sense. 2016. p. 315-351.

STYLIANIDES, G.J.; STYLIANIDES, A.J. Facilitating the transition from empirical arguments to proof. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, n. 40, p. 314-352, 2009.

Agradecimentos

O presente artigo foi realizado no âmbito do projeto O raciocínio geométrico e a visualização espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos sedeado no Centro Interdisciplinar de Estudos Educacionais - referência ESEXL/IPL-CIED/2016/A12.

Anexo D. Artigo 4

Versão dos autores

Desenvolvendo o raciocínio espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos

Developing spatial reasoning in prospective elementary teacher education

Lina Brunheira

ESELX — Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Resumo. Este artigo enquadra-se numa experiência de formação inicial com futuros professores e educadores. O objetivo é compreender de que forma as tarefas exploratórias podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio espacial e quais os processos de raciocínio que promovem. Os dados foram recolhidos por registos áudio e vídeo e a sua análise incidiu nos processos de construção, análise e transformação de modelos mentais e operações com modelos mentais. O estudo sugere que o tipo de tarefas propostas, os recursos e as interações na sala de aula são condições relevantes para a ativação destes processos. No que respeita às tarefas, a realização de contagens de elementos dos poliedros e o estabelecimento de relações e justificações revelam-se promotores dos processos de raciocínio espacial; o material manipulável é importante como suporte, mas a sua utilização deve ser limitada; e o contexto de trabalho colaborativo favorece a comunicação do raciocínio e a estruturação espacial.

Palavras-chave: Geometria; Raciocínio Espacial; Poliedros; Formação inicial de professores.

Abstract. This article reports a research concerning a prospective teacher education experiment. The aim of this study is to understand the contribution of exploratory tasks to the development of spatial reasoning and which are the processes of spatial reasoning promoted. Data was gathered from audio and video records and the analysis focused on the processes of constructing mental models, as well as inspecting, transforming and operating with mental models. The study suggests that the type of tasks, the physical models made available and the interactions in the classroom are relevant conditions to the activation of these processes. In respect to the tasks, the enumeration of elements of the polyhedra and the establishment of relations and justifications promote the processes of spatial reasoning; the physical models are important as a support, but its use should be limited; and the collaborative work context favours the communication of reasoning and the spatial structuring of objects..

Keywords: Geometry; Spatial reasoning; Structuring; Prospective Teacher Education.

Introdução

A evolução da matemática no séc. XIX, onde a busca pelo rigor se traduziu na recusa das demonstrações apoiadas em figuras e na desconfiança sobre a perceção visual, contribuiu para a desvalorização do raciocínio espacial[23] (Veloso, 1998). Também a ausência de investigação na área da visualização, particularmente depois de a psicologia ter sido dominada pela corrente *behaviorista*, teve uma influência na sua desvalorização (Presmeg, 2006). Contudo, a evolução das perspectivas sobre a geometria que identificamos em matemáticos como Atiyah (1982) ou Malkevitch (2009), valorizando a sua componente visual, contribuíram para uma mudança de paradigma. Também no campo da psicologia e da educação matemática, vários investigadores têm sublinhado a importância do raciocínio espacial. Por exemplo, para Battista (2007), "o raciocínio espacial fornece não apenas o *input* para o raciocínio geométrico formal, mas também ferramentas cognitivas críticas para uma análise geométrica formal" (p. 844), atribuindo assim um papel decisivo à componente visual, mesmo em situações onde já se opera a um nível mais formal. Da mesma forma, Johnston-Wilder e Mason (2005) referem-se à visualização como sendo uma característica inerente ao raciocínio geométrico, constituindo uma ferramenta poderosa: "Talvez o poder mais importante de todos é o poder de imaginar e expressar o que é imaginado através de gestos, movimentos, diagramas, palavras e símbolos" (p. 131). Por sua vez, Duval (1999) refere a importância da visualização além do campo da geometria na medida em que a "representação e a visualização estão no coração da compreensão matemática" (p. 3).

Sinclair et al. (2016) afirmam que na última década o raciocínio espacial tem merecido uma atenção crescente na investigação, quer no campo da educação matemática, quer das ciências cognitivas e, se é verdade que este tipo de raciocínio é relevante em todas as áreas da matemática, merece sem dúvida um destaque particular no ensino e

[23] Este conceito é também designado por outros investigadores por visualização, raciocínio visual, pensamento espacial e outras designações com significado idêntico (Gutiérrez, 1996; Sinclair et al., 2016).

aprendizagem da geometria. Contudo, estes autores defendem a necessidade de mais investigação sobre a promoção de oportunidades de envolvimento em raciocínio espacial, tanto para alunos como professores, bem como as formas de avaliar e valorizar tal raciocínio. Nesse sentido, este artigo visa compreender de que forma as tarefas podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio espacial e quais os processos de raciocínio envolvidos durante a sua resolução. Concretamente, procuraremos responder às seguintes questões: Quais os processos de raciocínio espacial em que os formandos se envolvem quando resolvem tarefas de contagem e estabelecimento de relações em classes de poliedros? De que forma estas tarefas, realizadas num contexto de ensino exploratório, podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio espacial?

Raciocínio espacial

Na recente revisão de estudos feita por Sinclair et al. (2016) a partir de 2008, os autores referem a existência de vários termos ou expressões que pretendem significar algo parecido e que têm em comum a atividade de imaginar objetos estáticos ou dinâmicos e atuar sobre eles (por exemplo, rodar, aumentar, etc.). Já anteriormente, Gutiérrez (1996) referia que a literatura existente sobre visualização até à data inclui uma grande variedade de termos e expressões (entre os quais raciocínio visual, pensamento espacial, imagens mentais, espaciais, visuais, etc.) gerando uma “confusão” que reflete a coexistência de diferentes áreas de investigação que se dedicam ao estudo da visualização, entre elas a educação matemática e a psicologia e, neste último caso, com diferenças entre as abordagens dos psicólogos de educação e os cognitivistas.

Consideremos a proposta de Battista (2007) que define raciocínio espacial como sendo a

> capacidade de ‘ver’, analisar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações. O raciocínio espacial inclui gerar imagens, analisá-las para responder a questões sobre elas, transformar e operar sobre imagens, e manter as imagens ao serviço de outras operações mentais. (p. 843)

Pelo seu lado, Gutiérrez (1996) utiliza o termo visualização, mas a sua definição é muito próxima da anterior, pois concebe-a como um tipo de raciocínio baseado no uso de elementos visuais ou espaciais, igualmente desenvolvida com vista à resolução de questões, como problemas ou demonstração de propriedades. Para este investigador, este tipo de raciocínio integra quatro elementos principais: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e capacidades de visualização.

As imagens mentais são o centro do raciocínio espacial. Gutiérrez (1996) define imagem mental como um tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade através de elementos visuais ou espaciais que assume constituir o elemento básico. No entanto, considera relevante ter ainda em conta outro tipo de representações que mobilizamos e se articulam com as imagens mentais: as representações externas, que correspondem a qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo retratos, desenhos, diagramas, etc. que ajudam a criar ou transformar as imagens mentais e a realizar raciocínio espacial.

Para o autor, um processo de visualização é uma ação mental ou física que envolve imagens mentais. Existem dois processos: a interpretação visual da informação para criar as imagens mentais e a interpretação de imagens mentais para gerar informação, a qual se decompõe em três subprocessos: observação e análise de imagens mentais, transformação de imagens mentais noutras imagens mentais e a transformação de imagens mentais noutro tipo de informação.

Na perspetiva de Battista (2009), para que seja possível operar mentalmente com objetos geométricos (por exemplo, compará-los, decompô-los e analisá-los), é necessário que estes tenham sido abstraídos a um nível suficientemente profundo, o que envolve a estruturação espacial. A estruturação espacial é um tipo especial de abstração correspondente ao ato mental de construir uma organização ou uma configuração para um objeto ou conjunto de objetos. Inclui identificar unidades, relações entre as unidades e reconhecer que um subconjunto de objetos, devidamente repetidos, pode gerar o conjunto todo (Battista & Clements, 1996). A estruturação espacial está assim associada a um modelo mental, ou seja, uma versão visual, não-verbal, da situação (objeto, ação…) que tem uma estrutura isomórfica à estrutura percecionada da situação e que é ativada para interpretar e raciocinar sobre ela (Battista, 2007). Por exemplo, diferentes formas de estruturar um quadrilátero determinam modelos diferentes, como um caminho fechado constituído por quatro segmentos, uma composição de segmentos unidos pelos seus extremos ou uma composição de quatro ângulos ligados.

No caso de objetos tridimensionais, a construção de modelos mentais envolve a *coordenação* e a *integração* de partes desse objeto ou das suas vistas. Por exemplo, num estudo com crianças dos 3.º ao 5.º anos, Battista e Clements (1996) estudaram a forma como as crianças estruturam espacialmente construções com cubos. Para isso, forneceram modelos físicos, representações pictóricas, vistas das construções (de cima, de frente e de lado), ou planificações da construção (Figuras 1, 2 e 3), e perguntaram o número de cubos das construções. Assim, para construir os seus modelos, as crianças precisaram coordenar as diferentes vistas, reconhecendo como se relacionam espacialmente. Isto implica, por exemplo, compreender que um quadrado representado numa vista corresponde a um cubo, mas que o mesmo cubo pode estar ainda representado noutra vista por um outro quadrado. Porém, para construir o modelo mental da construção, os indivíduos precisam ainda de as integrar, construindo uma visão holística de um objeto único e coerente com essas vistas. Naturalmente, a integração pressupõe a coordenação.

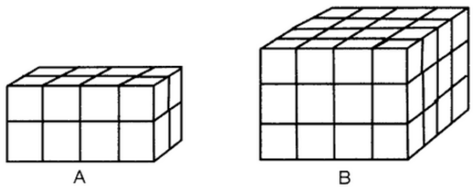


Figura 1. Representação pictórica
Fonte: Battista & Clements, 1996, p. 260

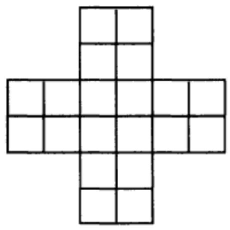


Figura 2. Planificação
Fonte: Battista & Clements, 1996, p. 277

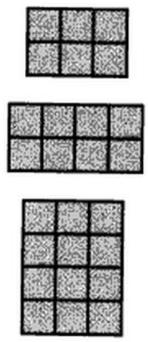


Figura 3. Vistas
Fonte: Battista & Clements, 1996, p. 285

Battista e Clements (1996) colocam como hipótese dois processos que conduzem à integração. O primeiro recorre à memória — o aluno evoca algum objeto que conhece e que tenha semelhanças com o novo objeto e constrói o seu modelo mental por comparação com o objeto conhecido. Por exemplo, é natural construir um modelo mental de um antiprisma por comparação com um prisma. O segundo pode ocorrer se o indivíduo não recordar um objeto adequado à comparação — nesse caso, pode ativar um processo alternativo e que consiste em fazer transformações em imagens de objetos "disponíveis". Por exemplo, pode construir um modelo mental de uma construção paralelipípedica visualizando uma translação sucessiva de uma "camada" da construção (Figura 4).

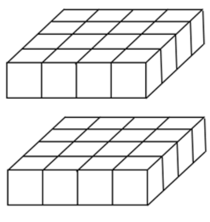


Figura 4. Construção paralelipipédica que resulta da integração de outros objetos ("camadas"). Fonte: Imagem dos autores

No estudo de Battista e Clements (1996), era pedido às crianças que indicassem quantos cubos teria cada construção. Este tipo de tarefa corresponde ao que os autores designam por tarefa de contagem ou enumeração que, como mostram os resultados do seu estudo, influencia e é influenciada pela estruturação espacial. Por um lado, a estruturação espacial fornece o *input* e a organização para a contagem. É o que acontece quando, para determinar o número de arestas de um prisma pentagonal multiplicamos 3 por 5 — já sabemos que as arestas se encontram, em igual número, nas duas bases e nas arestas laterais. Por outro, as tentativas de contagem geram frequentemente a estruturação ou restruturação espacial. Neste caso, o aluno ainda não identificou esta organização, mas a contagem leva-o a perceber a existência daqueles três conjuntos com o mesmo número de arestas que se localizam de determinada maneira. De facto, no estudo de Battista e Clements, a tarefa de contagem promoveu uma análise "mais fina" e uma estruturação melhor dos objetos do que aquela que os alunos evidenciavam originalmente ao percecionar o objeto ou ao construí-lo. De certa forma, as ações físicas ou mentais que são realizadas durante a contagem tornam-se representações explícitas da estruturação dos objetos e a reflexão sobre essas ações capacita os alunos para reorganizar a estruturação dos objetos espaciais.

Formação inicial de professores em geometria

O crescente interesse pelo raciocínio espacial que referimos anteriormente não tem sido acompanhado de orientações curriculares consistentes, incluindo as dirigidas à formação de professores, como ilustra o caso americano. Nos Estados Unidos da América, o NCTM (1994) sugere que os professores dos anos iniciais devem compreender a forma como a geometria é usada para descrever o mundo em que vivemos e resolver problemas concretos devem saber analisar figuras bi e tridimensionais incluindo o estudo de pavimentações, simetria, famílias de polígonos e poliedros. Devem ainda a conhecer a geometria nas suas várias perspetivas, produzir argumentações e justificações e valorizar o raciocínio espacial. Em 2000, o *Conference Board for the Mathematical Sciences*[24] (CBMS) elaborou um documento orientador para a formação de professores de matemática onde propôs que, no que se refere à geometria, todos os futuros professores que lecionam até ao 5.º ano desenvolvam as suas competências em várias áreas, incluindo o raciocínio espacial, nomeadamente através da familiarização com projeções, secções,

[24] Organização que congrega várias associações profissionais norte-americanas, como o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) e a American Mathematical Society (AMS).

decomposições de figuras comuns bi e tridimensionais; representação de objetos tridimensionais em duas dimensões e construção de objetos tridimensionais a partir de representações bidimensionais. O relatório mais recente do CBMS (2012) atualiza as ideias principais sobre a formação dos professores em geometria, alinhando-as com o documento *Common Core State Standards*[25], e reduzindo a geometria a uma área pouco representada na preparação de professores daqueles anos e sem qualquer referência ao raciocínio espacial. Esta mudança confirma a falta de consenso sobre o conhecimento geométrico que os futuros professores devem desenvolver (Jones, Mooney, & Harries, 2000), o que é agravado pela existência diminuta de investigação sobre o conhecimento dos professores e futuros professores no âmbito da geometria (Chapman, 2013; Clements & Sarama, 2011; Steele, 2013).

No que diz respeito à abordagem metodológica, Watson e Mason (2007) sugerem que o trabalho a desenvolver deve partir de tarefas que promovam o pensamento matemático dos futuros professores e desenvolvam a sua perceção sobre o poder dessas tarefas, uma orientação consistente com a ideia de Ponte e Chapman (2008) de que, na formação inicial, os futuros professores devem aprender segundo os mesmos métodos que se preconiza que venham a utilizar nas suas práticas. Nesta perspetiva, surge com especial interesse o ensino exploratório, um tipo de ensino assente essencialmente em tarefas de cunho exploratório e investigativo, onde cabe a quem aprende uma parte importante do trabalho de descoberta e construção do conhecimento e numa dinâmica de aula em que se reserva um espaço significativo ao trabalho dos alunos sobre as tarefas, a par de momentos de discussão coletiva e negociação de significados (Ponte, 2005).

A falta de atenção relativamente ao conhecimento de futuros professores na área da geometria é particularmente acentuada no âmbito do raciocínio espacial. A este respeito, por exemplo, Jones e Tzekaki (2016) referem que, até 2005, os estudos empíricos apresentados no âmbito das comunicações do PME[26] revelaram "um interesse limitado nesta capacidade *per si*, seu significado e definição, o seu papel no currículo e o seu desenvolvimento na escola" (p. 110). Este cenário não mudou no que se refere à caracterização ou desenvolvimento do raciocínio espacial em futuros professores (e professores em exercício), já que não há qualquer referência a investigações sobre este

[25] Common Core State Standars é um documento adotado na grande maioria dos estados dos EUA, desde 2009, que estabelece objetivos de aprendizagem por ano, desde o pré-escolar ao ensino secundário, que devem servir de orientação para o ensino da língua inglesa, artes e matemática.
[26] Congresso Anual do International Group of Phycology of Mathematics Education.

assunto na formação inicial nos anos subsequentes (2005-2015). Também no âmbito do CERME[27], como afirma Kuzniak (2013), uma das linhas emergentes nos estudos apresentados no campo da geometria, desde a origem deste congresso, incide sobre o desenvolvimento de capacidades espaciais. Contudo, são poucos os estudos realizados na formação inicial de professores em geometria e nenhum se centra no raciocínio espacial, embora possam mencioná-lo a propósito de outro aspeto em estudo — o que confirma a falta de foco neste assunto. Alargando o espectro de pesquisa, a revisão de literatura realizada por Sinclair et al. (2016) incidente em revistas científicas, atas de encontros e livros editados desde 2008, revela que o raciocínio espacial constitui uma das tendências atuais da investigação no campo da geometria, mas todos os estudos referidos envolvem crianças ou jovens do ensino básico ou secundário.

No contexto português, há a referir o estudo quantitativo de Menezes, Serrazina e Fonseca (2014), que envolveu mais de duas centenas de futuros professores e educadores de infância de três instituições de formação. Este estudo visou a avaliação do desenvolvimento do conhecimento de geometria com base nos dados recolhidos a partir de um teste de escolha múltipla. Apesar de não estar focado no raciocínio espacial, este foi um dos parâmetros analisados a partir da seleção de possíveis planificações do cubo. Os resultados revelam que a esmagadora maioria dos futuros professores reconhece uma planificação prototípica do cubo (entre 80 a 89% reconhece a planificação com a forma de T), mas menos de metade reconhece outras planificações, havendo uma delas que apenas é reconhecida por 13% dos respondentes. Estes resultados indiciam dificuldades dos futuros professores no raciocínio espacial, já que a escolha ampla da planificação prototípica pode resultar da memorização daquela configuração e a falta de reconhecimento das restantes é muito significativa e pouco suscetível de se alterar com a formação nas disciplinas de geometria.

Desta forma, a importância do desenvolvimento do raciocínio espacial, particularmente considerada para a aprendizagem da geometria, mas com uma forte influência na área da ciência, tecnologia, engenharia e matemática (as disciplinas STEM), como evidenciam alguns estudos (Whiteley, Sinclair, & Davis, 2015), contrasta com a fraca atenção que tem merecido no campo da investigação, particularmente na área da formação de professores. Assim, este estudo procura contribuir para o conhecimento sobre o raciocínio espacial dos futuros professores através dos seus processos e de tarefas

[27] Congresso da European Society for Research in Mathematics Education.

que o podem promover, indo ao encontro das necessidades referidas por Sinclair et al. (2016).

Metodologia de investigação

Opções metodológicas, participantes e recolha de dados. Este estudo tem um propósito interventivo, visando modificar as práticas da formação inicial de professores e educadores, por forma a melhorar as suas aprendizagens e contribuir para o conhecimento sobre a sua formação, partindo da compreensão que construímos sobre a forma como desenvolvem o seu raciocínio geométrico. A investigação foca-se na aprendizagem em contexto, a partir da conceção de estratégias e ferramentas de ensino, pelo que optámos pela metodologia de investigação baseada em design (IBD), na modalidade de experiência de formação (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003) em que a professora (a primeira autora do artigo) tem também o papel de investigadora.

Os dados que apresentamos foram recolhidos durante o segundo ciclo da IBD, envolvendo uma turma de 25 formandos que frequentavam a disciplina de Geometria (2.º ano da Licenciatura em Educação Básica[28]). Habitualmente, os participantes trabalhavam em grupos de três a cinco elementos, a partir de tarefas de natureza exploratória. Durante as aulas discutiam as suas ideias no grupo e, a partir dessa discussão, apresentavam a sua resolução à turma que a discutia coletivamente. A turma mostrou-se sempre bastante empenhada e o ambiente de trabalho era muito bom. Os dados que apresentamos referem-se a dois grupos de formandos que, habitualmente, têm diferentes níveis de desempenho. O grupo de Maria, Helena e Cristina tem um desempenho elevado, muito embora as participantes demonstrem lacunas em conceitos trabalhados no passado. O grupo de Afonso, Mónica, Vânia e Sandra é um grupo que mostra mais dificuldades, tanto no domínio de conceitos trabalhados no ensino básico como na aquisição de novos conceitos e desenvolvimento de capacidades.

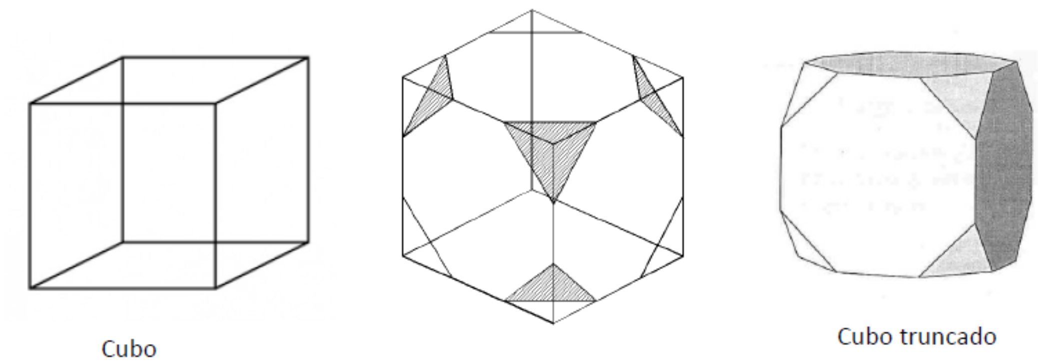
A recolha de dados foi feita a partir dos registos áudio e vídeo das aulas que foram ainda confrontados com a análise documental das produções escritas, muito embora não haja aqui referência a essas produções. Esta opção deriva do facto de os diálogos e os gestos captados nas imagens vídeo evidenciarem o raciocínio espacial dos participantes

[28] Em Portugal, os futuros educadores de infância e professores do 1.º ao 6.º ano começam por tirar uma licenciatura de três anos e depois um mestrado específico das áreas e dos anos em que vão ensinar.

de uma forma mais clara. Como defendem Battista e Clements (1996), e tal como referimos anteriormente, as ações físicas e mentais (neste caso explanadas em parte nos diálogos) tornam-se representações explícitas da estruturação dos objetos, um elemento fundamental do raciocínio espacial.

Neste artigo apresentamos dados resultantes da aplicação da tarefa *Sólidos platónicos truncados* (Figura 5). A partir dela, a turma deveria identificar o número de vértices, arestas e faces dos sólidos platónicos e dos sólidos obtidos quando um plano secciona o sólido da forma sugerida pelo enunciado, bem como estabelecer e justificar relações entre os elementos dos sólidos. Para a resolução da tarefa, cada grupo tinha ao seu dispor peças encaixáveis (Figura 6) para que pudessem construir os sólidos platónicos. Optámos por esta tarefa pois ela envolve o trabalho com figuras tridimensionais que, na perspectiva de Gutiérrez (2017), é a área da matemática que implica uma maior exigência em termos do raciocínio espacial. Além disso, o facto de se partir de um tipo de sólido para gerar mentalmente outro é uma atividade que implica necessariamente a construção de imagens mentais, bem como a realização de operações e transformações das imagens mentais.

Sólidos platónicos truncados



Imagina que vamos cortar um cubo junto de cada vértice por um plano, de modo a que a secção obtida seja um polígono regular, tal como mostra sequência de figuras que termina no cubo truncado.

1. No caso do cubo truncado, as faces correspondentes às secções são triângulos equiláteros e as restantes octógonos regulares. Observa os outros sólidos platónicos e diz como serão as faces dos sólidos platónicos truncados.

2. Quantos vértices, arestas e faces tem o cubo truncado? E os outros poliedros truncados? Preenche a tabela da página seguinte.
3. Observa os dados e compara-os. Estabelece as seguintes relações e procura justificá-las.
    a. Qual a relação entre o número de vértices do sólido original e do sólido truncado?
    b. E entre o número de faces?
    c. E de arestas?

Sugestão: Além de observares os valores, pensa na forma como chegaste até eles.

Figura 5. Tarefa proposta. Fonte: Tarefa dos autores, adaptada de Projeto Matemática para Todos, s.d.

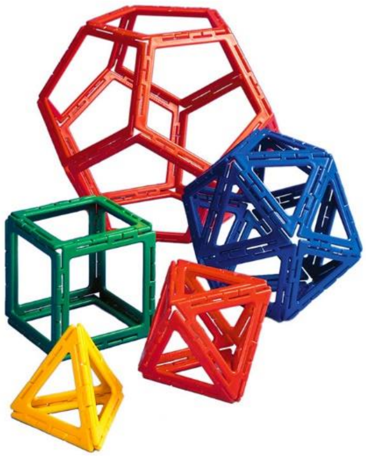


Figura 6. Material disponibilizado a cada grupo. Fonte: Foto disponível em http://www.polydron.co.uk/polydron-frameworks.html

Análise de dados. Para analisarmos o raciocínio espacial desenvolvido durante a atividade de contagem e estabelecimento de relações na classe dos sólidos platónicos, utilizamos um quadro de análise que construímos a partir das ideias de Battista (2009) e Gutiérrez (1996) sobre raciocínio espacial que, do nosso ponto de vista, se complementam.

Desta forma, consideramos que o raciocínio espacial inclui, por um lado, a *construção mental de imagens e modelos* sobre objetos espaciais e relações e, por outro, a *análise e realização de transformações e operações* entre objetos e relações usando as imagens e modelos mentais, ainda que se possam suportar em representações externas (Quadro 1).

Quadro 1

Processos de raciocínio espacial

<table>
<tr><th>Processos</th><th>Subprocessos</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Construção dos modelos mentais</td><td>Interpretação visual da informação</td></tr>
<tr><td>Identificação de subconjuntos do objeto</td></tr>
<tr><td>Coordenação dos subconjuntos do objeto</td></tr>
<tr><td>Integração dos subconjuntos do objeto</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Análise e transformação de modelos mentais e operações com modelos mentais</td><td>Observação e análise de imagens mentais</td></tr>
<tr><td>Transformação de imagens mentais noutras imagens mentais</td></tr>
<tr><td>Transformação de imagens mentais noutro tipo de informação</td></tr>
</table>

Fonte: Quadro elaborado pelos autores

A construção de modelos inclui a *interpretação visual da informação* (como perceber quais as características do plano de corte a partir das secções apresentadas), a *identificação de subconjuntos do objeto* (como decompor um sólido noutros sólidos ou em partes do sólido, como as faces), a *coordenação de subconjuntos do objeto* (implica identificar relações entre os subconjuntos, por exemplo, perceber se duas faces que se situam em subconjuntos diferentes são adjacentes ou partilham algum vértice) e *a integração dos subconjuntos do objeto* (que se traduz, por exemplo, na construção da imagem de um sólido a partir do conhecimento sobre a suas faces). A análise, transformação e operação com modelos mentais inclui a *observação e análise de imagens mentais* (conduz, por exemplo, a identificar o número de arestas em torno de um vértice), a *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais* (como identificar qual a face resultante de uma secção do sólido por um determinado plano) e a *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação* (por exemplo, generalizar que o número de vértices de um sólido platónico truncado corresponde ao produto do número de vértices do sólido platónico pelo número de arestas convergentes no mesmo vértice).

Resultados

Episódio A. Sandra, Vânia, Afonso e Mónica estão numa fase inicial da resolução da tarefa e estão a contar o número de faces, vértices e arestas de um cubo truncado. Este é o único sólido cuja representação bidimensional aparece no enunciado, mas para os auxiliar já construíram os cinco poliedros regulares com o material disponibilizado. No diálogo que se segue discutem o número de arestas:

Sandra: Dá-me 40. 3 e 3 são 6, mais 6 são 12 [contou as arestas das faces triangulares no topo]. 12 + 12 são 24 [juntou às da base]. 25, 26, 28, 28 [circunda uma face lateral, figuras 7, 8 e 9], 29, 30, 31, 32 [outra], 33,34,35,36 [outra], 37, 38, 39, 40! [a 4ª face lateral].

Figuras 7, 8, 9. Sandra conta as arestas de um cubo truncado a partir do cubo

Fonte: Fotos dos autores

Sandra: É o número de arestas do cubo mais 24 porque é o número de arestas que se acrescenta. 12 + 12, 24.

Vânia: Tem de ser 48. Quanto é que vos deu as arestas?

Afonso: 40.

Vânia: A nós deu-nos 48.

Afonso: Repara, quantas arestas é que tu já tens?

Vânia: Nós não fizemos assim. Tu tens em cada face um octógono. Então sabes que são 8 arestas em cada lado, então fazes 8, 8, 8, 8, 8, 8 [aponta para cada face do sólido]. 6 vezes 8.

Afonso: Mas a nós deu-nos 40. Só se nos enganámos.

Sandra: Acho que faltam os de cima [volta a repetir o que fizeram]. Esquecemo-nos de contar as de cima e as de baixo que são 4+4, 8. Dá 48.

Afonso: Não! Mas ao contares estas já estás a contar as de cima! Logo é 40.

Neste momento, a professora passa pelo grupo e alerta para o que diz o Afonso:

Professora: Reparem que isto [apontando para as arestas do modelo físico] é só uma aresta!

Sandra: Então ainda dá menos do que 40!

Sandra e o Afonso voltam ao cubo, contam as arestas (12):

Sandra e Afonso: Então 12 + 24. Dá 36!

Neste episódio podemos observar como o mesmo objeto pode ser estruturado de formas diferentes, o que é evidenciado pela forma como os formandos tornam explícitas as suas contagens. As ações de Sandra e Afonso sugerem um modelo mental que resulta da *identificação de subconjuntos do objeto*: a composição das faces triangulares (e respetivas arestas) com as arestas do cubo que surgem associadas às arestas das quatro faces laterais. Contudo, a *integração* dos vários elementos não é correta devido a um problema de *coordenação* — não identificam inicialmente que estão a duplicar a contagem de quatro arestas. Já Vânia e Mónica (que não intervém neste diálogo apesar de estar a trabalhar com a colega) revelam um modelo que resulta também da *identificação de subconjuntos do objeto*: a composição de 6 octógonos e respetivas arestas, o que não requer a contagem separada das arestas das faces triangulares. No entanto, também este par erra na contagem pelo mesmo problema identificado no raciocínio dos colegas — a coordenação dos 6 octógonos que têm 12 arestas em comum.

Apesar dos erros, Sandra já havia identificado que o número de arestas do sólido truncado é a soma do número de arestas do sólido original com o número de arestas que resultam da secção. Esta relação resulta da *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação* e, curiosamente, é a sua aplicação e o confronto de resultados diferentes que os leva a repensar as suas estratégias e a restruturar o sólido. Há ainda a referir que, se o material disponível foi fundamental para realizar as contagens, possibilitando a realização de ações que explicitam o modelo mental, também há a possibilidade de induzir o erro de duplicação de arestas, pelo facto de fisicamente existirem lados que se encaixam para formar uma aresta mas não se "fundem".

Episódio B. Afonso e Mónica estão a determinar o número de faces, vértices e arestas de outros sólidos truncados sobre os quais não existe qualquer representação externa. No início deste episódio estão a analisar o icosaedro truncado:

Afonso:	O número de vértices, ou seja 12, vezes 5. Percebes porque é que é?
Mónica:	Não.
Afonso:	Vamos fazer com este [octaedro]. Então é assim: cada vértice, quando tiver a face truncada[29], essa face vai ficar com o número de lados que é o número de arestas que converge nesse vértice. E depois só temos de multiplicar pelo número de vértices.
Mónica:	Ah! Já percebi.

[29] Para simplificar, consideremos que a expressão "face truncada" corresponde à nova face que se obtém quando o poliedro é truncado.

Neste diálogo é percetível que Afonso já encontrou uma relação entre o número de vértices do sólido original e do sólido truncado e explica-a a Mónica. Esta relação pressupõe a construção de uma imagem mental da face truncada em que os vértices da nova face se situam nas arestas que convergem num vértice do poliedro original, ou seja, a *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais.* Ao encontrar a relação referida, Afonso procede à *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação*. A utilização desta expressão é representativa de uma situação em que é a estruturação espacial do sólido que determina a contagem e não o contrário.

No próximo passo, vão analisar o dodecaedro truncado, mas começam por registar o número de vértices do dodecaedro. Mónica segura no sólido e Afonso conta (Figura 10):

Afonso: 1, 2, 3, 4, espera. Já contaste este?

Figuras 10, 11 e 12. Mónica e Afonso contam os vértices do dodecaedro
Fonte: Fotos dos autores

Afonso: Põe assim que é mais fácil [Figura 11]. Estão 5 aqui e 5 aqui [pentágono na base e no topo]. … 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 [Figura 12]. OK 10. Então são…

Mónica: 20.

Afonso: 5, 5, 10. Sim, são 20.

Afonso: Agora número de vértices do sólido truncado… é só fazer 5 vezes 20. Vamos ver porquê. O número de arestas que converge…

Mónica: É 3, agora é 3.

Afonso: Ah, pois é, agora é triângulos [a face truncada]. 60.

Mónica: Então, número de faces do sólido truncado. Então este é 12. Somar as faces truncadas 20. 20+12.

Afonso: Outra vez?! [no icosaedro fez a mesma operação]. Ah, sim! Só que agora é ao contrário! Antes era 12 vértices e 20 faces e agora é 12 faces e 20 vértices!

Afonso: São 32.

Nesta interação, vemos que a determinação do número de vértices do dodecaedro truncado surge naturalmente da relação encontrada e Mónica parece encontrar sentido nessa relação que Afonso lhe explicou, já que é ela própria que corrige o colega ao dizer que deve multiplicar por 3 e não por 5. Curiosamente, o que parece ser mais desafiante é a contagem dos vértices do sólido original. De facto, o dodecaedro é o poliedro regular que tem mais vértices e é importante, mais do que nos outros sólidos, encontrar uma organização mental que nos permita realizar a contagem eficazmente. A primeira tentativa deste par foi percorrer, aparentemente sem critério, todos os vértices, uma abordagem que foi rapidamente abandonada. A estratégia que usaram depois mostra que, por um lado, a posição do sólido é relevante, em particular pelo posicionamento de uma face na horizontal, como se tratasse de uma base. Por outro lado, a forma de contar mostra que o modelo mental que estão a construir resulta da *identificação dos subconjuntos do objeto*: os 5 vértices da face topo, os 5 vértices da face "base" e os 10 vértices que se encontram na zona central do poliedro e que formam uma espécie de ziguezague. Desta forma, neste caso é a tarefa de contagem e as ações que desencadeia que sugerem uma estruturação do sólido.

Ainda neste episódio vemos que o par de formandos já percebeu que para contar o número de faces de um sólido truncado tem de adicionar o número de faces do sólido original com o seu número de vértices (de novo *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação*). Note-se que o resultado obtido para o dodecaedro truncado (32) é o mesmo que o resultado para o icosaedro truncado, o que é notado por Afonso, uma observação que poderia ser explorada mais ainda pelo facto de o icosaedro ser dual do dodecaedro e vice-versa.

Episódio C. De seguida, Afonso e Mónica passam à contagem das arestas do dodecaedro. Afonso pede para colocar o sólido de novo na posição em que contaram os vértices. Já sabem que têm 5 arestas em cada pentágono na face topo e na base e vão contar as restantes (Figura 13):

Afonso: Então agora é 4… Não… 13, 14… Contámos bem?!

Voltam a contar várias vezes, mas algumas vezes reparam que estão a contar a mesma aresta mais do que uma vez e vão obtendo valores diferentes. Ao fim de várias tentativas chegam à seguinte organização (Figura 14):

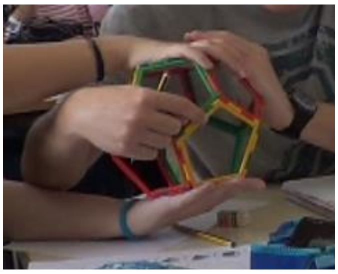


Figura 13. Mónica e Afonso contam as arestas do dodecaedro
Fonte: Foto dos autores

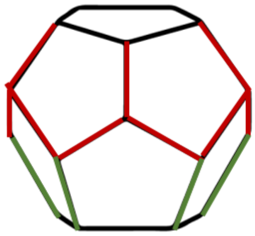


Figura 14. Dodecaedro decomposto em subconjuntos
Fonte: Imagem dos autores

Afonso: [conta as vermelhas] … 14, 15. 5 [pentágono topo], 5 [pentágono na base], só falta as de lado, 5 [verdes].

Mónica: Então 25, são 30 [no dodecaedro].

Afonso: Então são 90 [arestas no dodecaedro truncado]?! Não pode ser! Número de vértices, são 20. É 20 vezes 3 mais 30. Percebes porquê? As já existentes [30], e depois é o número de vértices [do dodecaedro] que é 20 vezes o número de arestas que converge num vértice. Então é 90.

Neste diálogo observamos a construção do modelo mental do dodecaedro, mas desta vez focado nas arestas. De facto, embora se trate do mesmo objeto que já foi analisado anteriormente, agora o foco são as arestas e não os vértices, o que faz com que a análise se concentre noutras relações entre os elementos. Para contar eficazmente as arestas, tal como já acontecera com os vértices, Mónica e Afonso *identificam subconjuntos do objeto* cuja *integração* resulta no dodecaedro. Contudo, além desta decomposição, o processo de estruturação espacial em causa implica *coordenar* os diferentes subconjuntos, o que é essencial para perceber que há arestas que correspondem a faces diferentes e não duplicar a sua contagem. Uma vez encontrada essa estrutura, Mónica e Afonso obtiveram o número de arestas do dodecaedro e, em seguida, do dodecaedro truncado. No entanto, para o primeiro sólido foi a tarefa de contagem das arestas que determinou a estruturação geométrica; para o segundo, foi a estruturação geométrica que utilizou a identificação do número de arestas, uma vez que o par já identificou a relação entre as arestas do sólido original e do sólido truncado.

Episódio D. Mónica e Afonso identificaram todas as relações pedidas e o número de faces, vértices e arestas dos poliedros truncados. Contudo, a professora pediu-lhes para completarem a resposta à primeira questão, sobre o tipo de faces de cada novo poliedro, uma vez que só tinham referido a face que se obtém ao truncar o sólido e omitiram a forma da face original depois de transformada. No diálogo seguinte estão a analisar o tetraedro truncado:

Afonso: É um quadrilátero assimétrico. Não sei. Quando se corta o tetraedro fica assim [Figura 15]… Não sei dizer bem qual é o quadrilátero…


Figuras 15 e 16. Afonso e a professora simulam como ficam as faces triangulares quando o cubo é truncado. Fonte: Fotos dos autores

Professora: Ah! Já estou a perceber. A outra face fica um quadrilátero, qual é esse quadrilátero?

Afonso: Pois é essa a questão. A Mónica diz que é um paralelogramo.

Professora: Mas não se esqueçam que o que acontece a este vértice vai acontecer aos outros também! Portanto, têm de fazer assim [Mónica coloca as mãos também, Figura 17]

Figura 17. Mónica simula com a professora como fica uma face triangular depois de truncar três vértices
Fonte: Foto dos autores

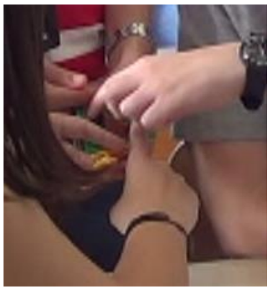


Figura 18. Afonso conta o número de arestas da nova face
Fonte: Foto dos autores

Afonso: Ah, sim, já percebi. Tem 1, 2, 3, 4, 5, 6 [contorna a figura formada, Figura 18]. OK, já percebi. É um… pentágono? Não, um hexágono.

Professora: Mas agora pensem lá… O Afonso contou um a um, usando o seu dedo. Não existe uma lógica que me permita perceber quantos lados é que eu vou ter?

Afonso: Ah! Basta contar o número de vértices e o número de lados já existentes!
Professora: Ou seja? Isso não é o mesmo número? Ou seja, aqui [tetraedro] tens 3 lados e 3 vértices. Passaste a ter?
Afonso: Um hexágono, sim.
Professora: É importante a estrutura da figura para nós percebermos o que está a acontecer.

Num outro momento, a professora passa pelo grupo e Afonso aborda-a:

Afonso: Nós estivemos a ver a figura e deu-nos em todos um hexágono.
Professora: Em todos?
Afonso: Sim.
Professora: Então vamos lá pensar naquela relação que tu disseste há bocado. Portanto, quando temos triângulos nas faces vamos passar a ter hexágonos. Foi o que aconteceu no tetraedro, e aqui [octaedro]?
Afonso: Também um triângulo, vai acontecer o mesmo.
Professora: Portanto ficamos com hexágonos. No icosaedro idem. E no dodecaedro?
Afonso: Também porque convergem 3 arestas num vértice. Ah não! Pois é, não pode ser. Então fica… é multiplicar, não? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. É um…
Mónica: Já falámos disso aqui.
Professora: Então qual é o prefixo de 10…

Anteriormente, Afonso havia determinado corretamente o tipo de face que surge nos poliedros quando os truncamos e justificou o número de vértices dessa face. Esta ação implica uma *transformação* do modelo mental do poliedro original, através da *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais*, dando origem a um novo modelo — o do poliedro truncado. Contudo, como é visível neste episódio, os formandos não tiveram o mesmo sucesso em transformar mentalmente as faces existentes. No caso do tetraedro, foi necessária uma simulação com materiais e a realização de ações físicas para contar o número de arestas do hexágono resultante, ou seja, foi necessário ir além de uma operação mental. Mesmo depois da análise do tetraedro truncado, não foi fácil generalizar a relação pois Afonso considerava que seriam sempre hexágonos e foi a professora que lhe sugeriu repensar esta conclusão.

Desta forma, podemos perceber que mesmo tendo descoberto anteriormente todos os valores corretos para o número de arestas, vértices e faces dos poliedros truncados e um dos tipos de faces, estes formandos não tinham ainda uma estruturação completa dos sólidos, mas sim uma estruturação local, focada nas faces truncadas.

Episódio E. Neste episódio analisamos o raciocínio de outro grupo que discute a forma das faces de um dodecaedro truncado. Anteriormente as formandas já tinham acordado que as faces truncadas resultam em triângulos, pelo que neste diálogo se debruçam sobre a forma como ficam transformadas as faces pentagonais do dodecaedro:

Maria:	Desculpa, mas como é que isto dá pentágonos e triângulos????
Helena:	Porque se vais cortar um bocado aqui, um bocado aqui, um bocado aqui…
Maria:	Mas não ficam pentágonos!
Helena:	Isto aqui! Nesta face [em vez do pentágono original] fica!
Maria:	Como é que ficam pentágonos?! Fica o dobro!
Helena:	O dobro???? Isto daqui é um pentágono! Quando tu cortas até aqui ao meio neste fica um pentágono ao contrário.
Maria:	Um pentágono??… Não fica 1, 2, 3, 4, 5, 6, … 10 lados! Estás a fazer isso mal!
Helena:	Porquê????
Maria:	Desculpa, tu não estás a ver bem! Como é que fica o mesmo número de lados se tu vais acrescentar 5 arestas? Como é que fica um pentágono na mesma? Porque isto não une! Ou une? Se calhar une!
Cristina:	O problema é que se calhar une…
Maria:	Pois eu não pus a unir…
Cristina:	Pois porque se este unisse, aqui [no cubo truncado] também era quatro lados [em vez dos octógonos]. Então como é que se diz como 10 lados? Deca… Decágono…
Maria:	Decágono??? Professora! Como é que se chama um polígono com 10 lados?

Nesta acesa discussão, Maria e Helena começam por discordar relativamente à nova face — Maria considera que obterá decágonos e Helena outros pentágonos. Na verdade, essa discordância resulta de diferentes interpretações sobre os pontos de interseção do plano de corte, ou seja, a *interpretação visual da informação*, um aspeto ainda não focado pelo facto de não terem surgido interpretações alternativas nos episódios anteriores. Concretamente, Maria considerou que o plano interseta as arestas do sólido dividindo-as em três partes, ou seja, de acordo com o exemplo do enunciado; Helena considerou que o plano de corte interseta as arestas nos seus pontos médios, uma interpretação alternativa ao enunciado; Cristina acaba por esclarecer qual deve ser a interpretação procurando aquela que é consistente com o cubo truncado. Desta forma, Maria e Cristina mostram construir uma imagem mental correta da nova face, pois além de identificarem corretamente a sua forma, percebem que o número de arestas da face resultante é o dobro do número de arestas da face original. Já Helena deu uma resposta que é incorreta mas, apesar disso, reveladora de um bom raciocínio espacial. De facto, se as condições que definem o plano de corte fossem as que considerou, a face resultante seria igualmente um pentágono que, efetivamente estaria noutra posição. Aliás, é curioso que as suas condições são as que definem um novo poliedro arquimediano, um icosidodecaedro (Figura 19).

Desta forma, consideramos que no âmbito desta tarefa Maria, Helena e Cristina revelam ter sucesso na *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais.*

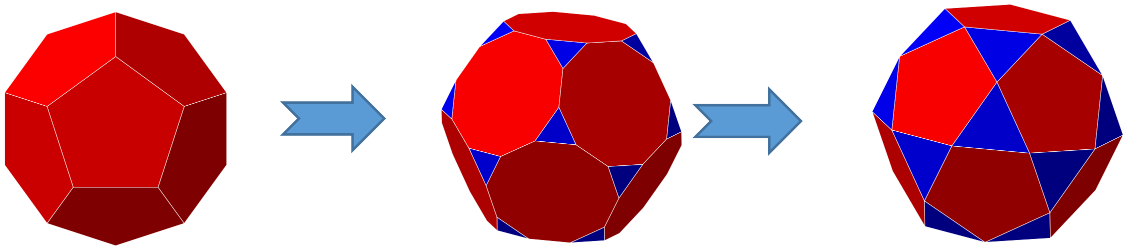


Figura 19. Construção do dodecaedro truncado e icosidodecaedro
Fonte: Esquema elaborado pelos autores

Desta forma, consideramos que no âmbito desta tarefa Maria, Helena e Cristina revelam ter sucesso na *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais.*

Discussão

A análise da forma como os participantes resolveram a tarefa revelou vários aspetos sobre os processos de raciocínio espacial em que se envolveram e que destacamos nesta secção. Por um lado, verificamos que os futuros professores construíram modelos mentais sobre os sólidos platónicos e sobre os sólidos platónicos truncados, analisaram, transformaram e operaram com estes modelos, o que já era esperado atendendo ao que era pedido na tarefa. Analisando mais detalhadamente estes processos, percebemos que o trabalho realizado envolveu ainda todos os subprocessos que considerámos no quadro de análise, ainda que com níveis de desafio diferentes.

Na *construção de modelos mentais*, a *interpretação visual da informação* e a *identificação de subconjuntos dos objetos* que integrados resultassem no objeto completo parecem ser processos que os participantes realizaram com alguma facilidade; já a *coordenação dos subconjuntos* constituiu um desafio maior, uma vez que surgiram alguns erros de duplicação de arestas. Para a superação deste desafio contribuíram especialmente a manipulação física dos sólidos e a explicitação verbal dos modelos mentais que os participantes tinham dos sólidos. De facto, tratam-se de representações externas que, tal como refere Gutiérrez (1996), ajudam a realizar raciocínio espacial.

Do ponto de vista da *análise, transformação e operação sobre os modelos mentais*, consideramos que a *observação e análise de imagens mentais* foi um processo realizado com sucesso na maioria das vezes, o que contribuiu para a *transformação de imagens mentais noutro tipo de informação*—neste caso, a explicitação das relações entre os elementos dos sólidos. Já a *transformação de imagens mentais noutras imagens mentais* assume diferentes níveis de dificuldade, tal como vimos na determinação da forma das faces do sólido truncado, o que provavelmente decorre da complexidade do objeto e da operação a realizar. No entanto, destacamos que, mais uma vez, foi determinante a manipulação física dos sólidos e a explicitação verbal dos modelos mentais para o raciocínio correto.

Um outro aspeto que destacamos diz respeito às formas de estruturar um objeto que, como refere Battista (2009), podem ser diferentes. De facto, como os dados sobre a contagem de vértices e arestas do dodecaedro mostram, não só diferentes indíviduos constroem modelos mentais diferentes, como a própria questão pode desencadear a construção de um modelo diferente para o mesmo objeto, o que afeta o raciocínio espacial. Além destas diferenças, percebemos ainda que, por vezes, a estruturação dos objetos é apenas local, ou seja, pode não existir um modelo para todo o objeto mas apenas de partes do objeto, sem haver integração.

Finalmente, centremo-nos no papel da tarefa. Tal como concluíram Battista e Clements (1996) no seu estudo, a atividade influenciou e foi influenciada pela forma como os indivíduos estruturam os objetos. Neste caso, parece-nos que a mobilização de vários processos de raciocínio espacial foi particularmente promovida por alguns fatores: a complexidade dos sólidos utilizados e da operação de secção por um plano que deve ser adequada aos indivíduos a que se destina, mantendo um nível de desafio cognitivo elevado mas alcançável; a existência de modelos físicos para os sólidos platónicos e a inexistência do mesmo tipo de modelo para os truncados que obrigou a um trabalho mental que não seria realizado se existissem os modelos para todos os sólidos; o pedido do número de faces, vértices e arestas que, associada à complexidade dos objetos, implica a sua estruturação; o estabelecimento de relações e sua justificação que reforça a necessidade de estruturação.

Além do enunciado da tarefa, temos a forma como foi realizada. Como os diálogos mostram, a interação entre os participantes com a comunicação dos seus raciocínios foi um elemento determinante para o sucesso da atividade. Em várias ocasiões, o confronto de respostas diferentes resultou na revisão do raciocínio dos futuros professores ou no seu enriquecimento, decorrente da diversidade de perspetivas. De facto, apesar do raciocínio espacial apelar a uma atividade centrada em imagens mentais, eventualmente mais difíceis de partilhar, sublinhamos a relevância do trabalho de natureza exploratória (Ponte, 2005), com uma forte componente de discussão e negociação de resultados que, também neste tema e no âmbito da formação inicial de professores, se revela fundamental.

Conclusão

O desenvolvimento do raciocínio espacial envolve a realização de processos associados à construção, análise, transformação de modelos mentais e operações com modelos mentais (Battista, 2009; Gutiérrez, 1996). Este estudo sugere que há várias condições que são relevantes para a ativação destes processos, em particular, no que respeita ao tipo de tarefas propostas, os recursos disponibilizados e as interações na sala de aula. No que respeita às tarefas, a seleção dos sólidos e das operações mentais deve manter o nível de desafio cognitivo elevado, mas alcançável; a realização de contagens de elementos dos poliedros e o estabelecimento de relações e justificações revelam-se promotores dos processos de raciocínio espacial; o material manipulável é importante como suporte, mas a sua utilização não deve diminuir o desafio cognitivo, nomeadamente, substituindo ou sobrepondo-se às imagens mentais; e o contexto de trabalho colaborativo favorece a comunicação do raciocínio que, por sua vez, estimula a estruturação e restruturação espacial dos objetos. Desta forma, a formação inicial de professores deve promover as condições necessárias à realização deste tipo de trabalho, valorizando o raciocínio espacial como uma componente fundamental do raciocínio.

Agradecimentos

O presente artigo foi realizado no âmbito do projeto O raciocínio geométrico e a visualização espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos sedeado no Centro Interdisciplinar de Estudos Educacionais — referência ESEXL/IPL-CIED/2016/A12.

Referências

Atiyah, M. (1982). What is geometry? The 1982 Presidential Address. *The Mathematical*

Gazette, 66(437), 179-184.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Greenwich, CN: Information Age.

Battista, M. T. (2009). Highlights of research on learning school geometry. In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 91-108). Reston, VA: NCTM.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), 258-292.

Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(4), 237-243.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13.

CBMS (2000). *Mathematical Education of Teachers Project*. Washington, DC: American Mathematical Society.

CBMS (2012). *Mathematical Education of Teachers II*. Washington, DC: American Mathematical Society.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of mathematics teacher education, 14*(2), 133-148.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference, 1,* 3-26.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.*), Proceedings of the 20th PME International Conference, 1*, 3-19.

Johnston-Wilder, S. & Mason, J. (Eds.). (2005). *Developing thinking in geometry*. London: Sage.

Jones, K., Mooney, C., & Harries, T. (2002). Trainee primary teachers' knowledge of geometry for teaching. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 22*(2), 95–100.

Jones, K. & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 109-149). Rotterdam: Sense.

Kuzniak, A. (2013). Teaching and learning geometry and beyond… In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the eighth congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 33-49). Turkey: Ankara.

Malkevich, J. (2009). What is geometry? In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 3-16). Reston, VA: NCTM.

Menezes, L., Serrazina, L., Fonseca, L., Ribeiro, A., Rodrigues, M. Vale, I., … Tempera, T. (2014). Conhecimento de geometria de alunos da licenciatura em Educação Básica. *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense.

Projecto Matemática para Todos (s.d.). *Investigações na sala de aula—propostas de trabalho*. Lisboa: APM

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics education, 48*(5), 691-719.

Steele, M. D. (2013). Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(4), 245-268.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais.* Lisboa: IIE.

Watson, A. & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. Journal of Mathematics Teacher Education, 10(4), 205-215.

Whiteley, W., Sinclair, N., & Davis, B. (2015). What is spatial reasoning? In B. Davis & Spatial Reasoning Study Group. *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 3-14). New York, NY: Routledge.

Anexo E. Caracterização das participantes

De seguida, apresento os dados que caracterizam as participantes de forma mais detalhada, particularmente no que respeita às suas idades (Figura 1), formação matemática escolar (Figura 2) e relação com a matemática (Figura 3) e geometria (Figura 4). Apresento ainda dois indicadores relativamente às suas intencionalidades no que respeita à formação académica: a ordem da opção com que escolheram a Licenciatura em Educação Básica na candidatura ao ensino superior (Figura 5) e a profissão que pretendem exercer no futuro (Figura 6). Todos os dados foram obtidos a partir de um questionário aplicado no primeiro dia de aulas da unidade curricular.

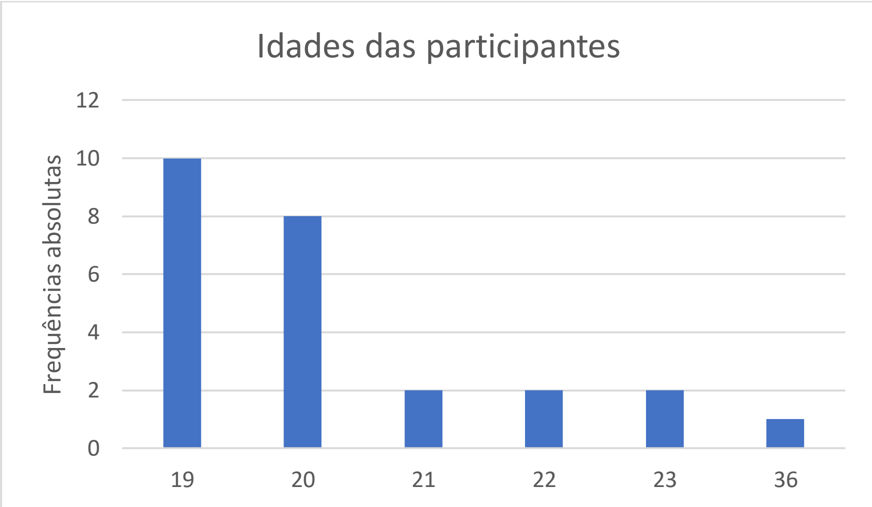


Figura 1. Distribuição das idades das participantes

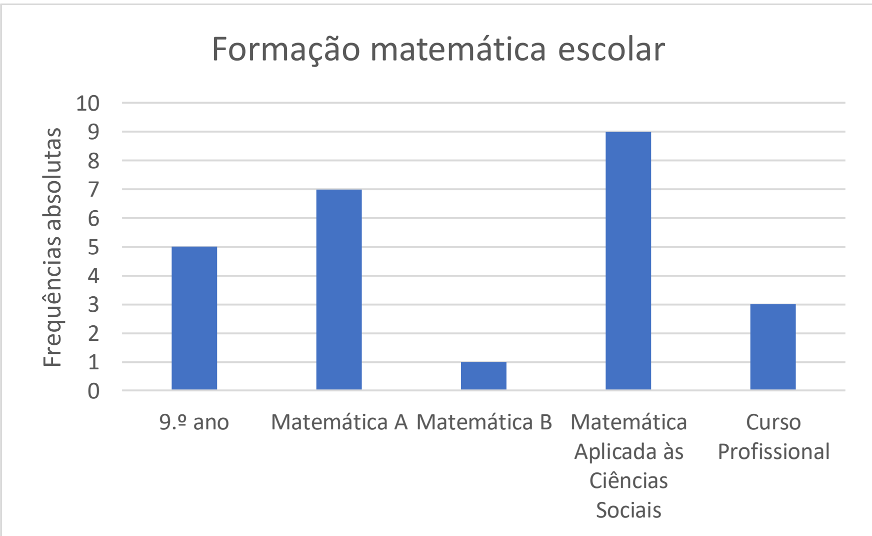


Figura 2. Formação matemática escolar

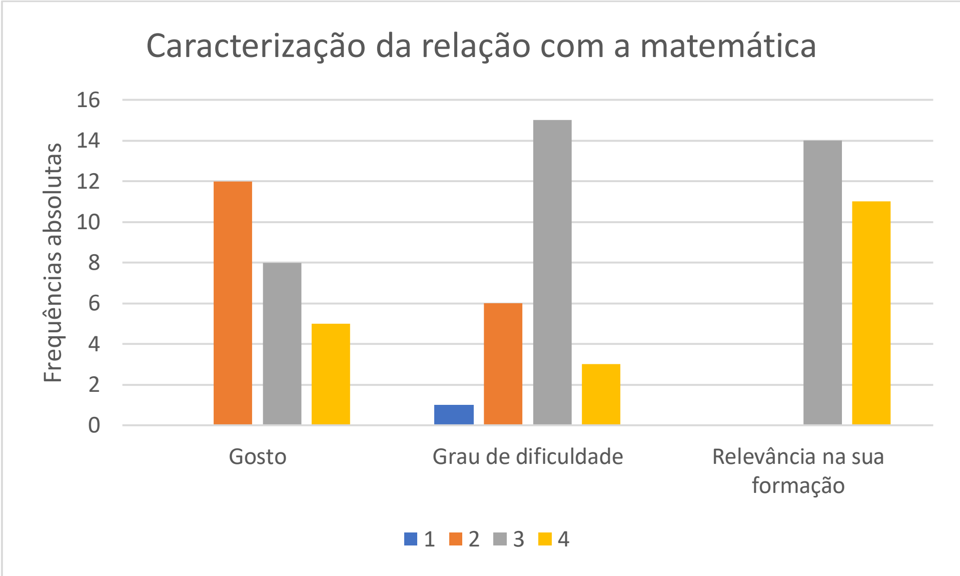


Figura 3. Caracterização da relação com a matemática a partir da atribuição de níveis (1 para baixo, 4 para elevado) a três parâmetros: gosto pela área, grau de dificuldade que reconhece na sua aprendizagem e relevância que lhe atribui para a sua formação

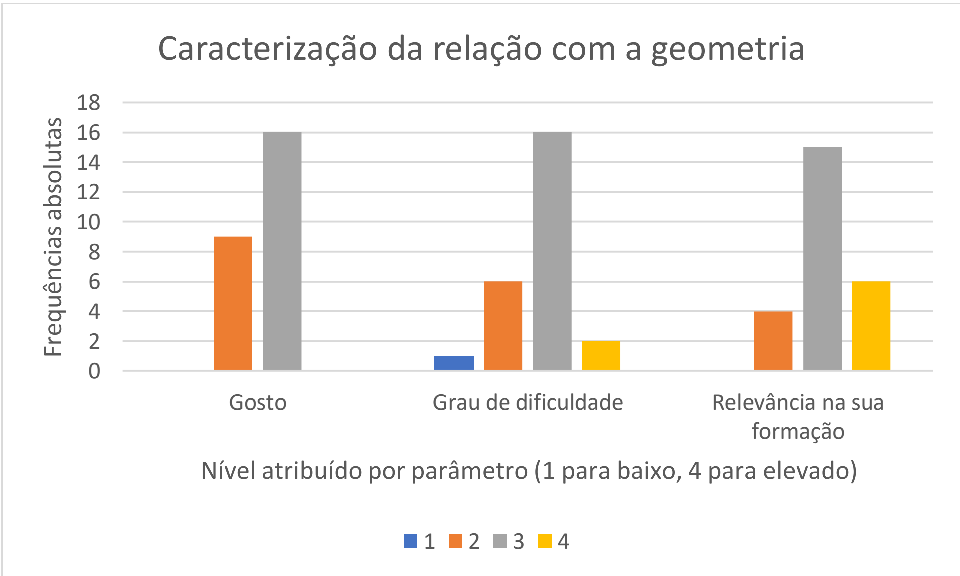


Figura 4. Caracterização da relação com a geometria a partir da atribuição de níveis (1 para baixo, 4 para elevado) a três parâmetros: gosto pela área, grau de dificuldade que reconhece na sua aprendizagem e relevância que lhe atribui para a sua formação

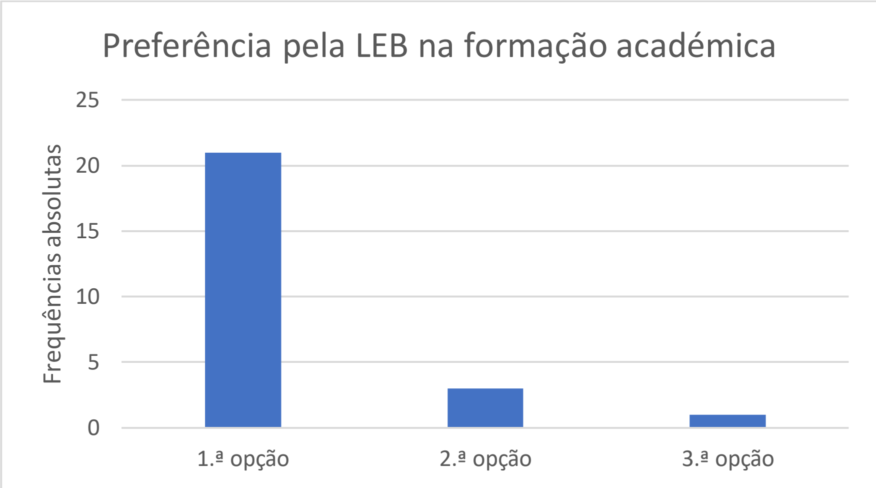


Figura 5. Ordem da opção pela LEB na candidatura ao ensino superior

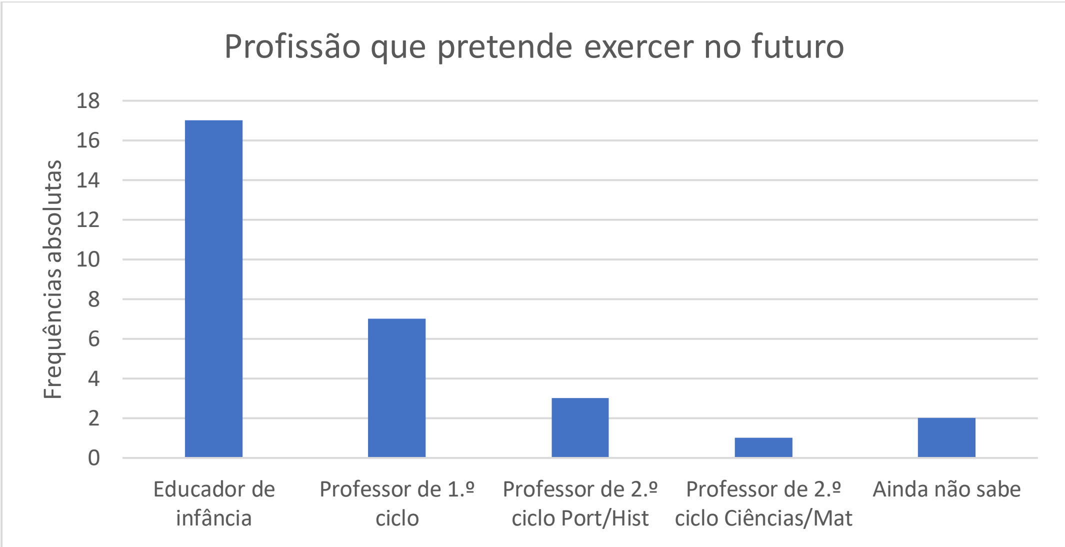


Figura 6. Escolhas sobre a profissão que pretende exercer no futuro

Anexo F. Planificação geral da Unidade Curricular

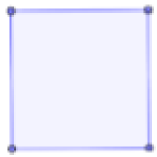
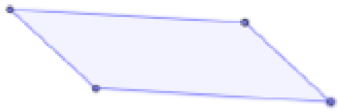
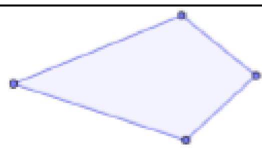
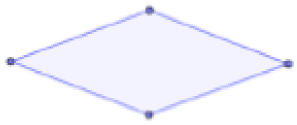
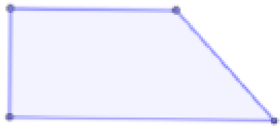
Temas	Sequência/Subtemas	Objetivos matemáticos específicos/objetivos didáticos	Principais recursos	Nº de aulas
Figuras e transformações geométricas no plano Transformações geométricas	**Sequência 1** Triângulos e Quadriláteros	• Conhecer os principais quadriláteros notáveis e as suas propriedades; • Estabelecer relações entre quadriláteros e classificá-los; • Compreender e utilizar diferentes formas de classificação de quadriláteros a partir de critérios propostos e vice-versa; • Definir quadriláteros; • Conhecer as classificações usuais de triângulos quanto a lados e a ângulos. • Compreender que o ensino das figuras geométricas não se deve focar em protótipos rígidos e que o seu conhecimento e compreensão deve emergir do trabalho com as figuras a partir de propostas desafiantes • Identificar as principais capacidades de visualização envolvidas numa atividade • Identificar o papel de materiais estruturados (Geoplano) na realização das atividades	• Tarefas *Quadriláteros no geoplano, Propriedades dos quadriláteros, Classificação de quadriláteros e triângulos, Definição de quadriláteros*. • Ficheiros com construções dinâmicas em GeoGebra • Geoplano • Tarefas extra-aula: *Quadriláteros sobrepostos, Composição de triângulos* e *Dobragens e cortes*	6
	Sequência 2 Ângulos, paralelismo e perpendicularidade	• Conhecer o conceito de ângulo; • Identificar e relacionar ângulos específicos (lados paralelos, verticalmente opostos, alternos internos…); • Identificar e utilizar ângulos na resolução de problemas geométricos ou em situações de modelação matemática; • Identificar e justificar as amplitudes de ângulos em figuras geométricas recorrendo às propriedades estudadas; • Generalizar e justificar a relação entre o número de lados de um polígono e a soma das amplitudes dos ângulos internos; • Distinguir argumentos válidos de argumentos inválidos na justificação de uma afirmação. • Reconhecer aspetos sensíveis na aprendizagem do conceito de ângulo, de paralelismo e perpendicularidade nos primeiros anos.	• Tarefas *Relações entre ângulos, Descobrir os ângulos, Ângulos em polígonos.* • Ficheiros com construções dinâmicas em GeoGebra • Tarefas extra-aula: Pavimentações regulares	5

	Sequência 3 Lugares geométricos	• Conhecer os conceitos de circunferência, mediatriz e bissetriz enquanto construção geométrica e lugar geométrico. • Resolver problemas usando lugares geométricos	• Tarefas *Lugares geométricos, Mais problemas.* • Instrumentos de medição e desenho	2
	Sequência 4 Semelhança	• Compreender o conceito de semelhança de figuras; • Identificar situações da vida real que envolvam semelhança; • Determinar se duas figuras são semelhantes por comparação de medidas e por decomposição de figuras; • Construir figuras semelhantes a partir da composição de triângulos; • Conhecer a relação entre as áreas de duas figuras semelhantes. • Compreender que a relação numérica entre as medidas de figuras semelhantes é de natureza multiplicativa e que o raciocínio aditivo é um erro comum no raciocínio dos alunos.	• Tarefa *Semelhanças em logotipos, Semelhança e área* • Papel triangulado isométrico • Tarefas extra-aula: *O tamanho do papel modelo A; Semelhança no espaço*	3
	Sequência 5 Isometrias • Reflexão; • Rotação; • Translação; • Reflexão deslizante.	• Conhecer o conceito de isometria; • Conhecer as quatro isometrias fundamentais; • Construir imagens de figuras a partir de isometrias; • Identificar a isometria que transforma uma figura noutra congruente; • Investigar relações entre isometrias; • Compreender que há figuras (limitadas) que ficam invariantes quando lhes são aplicadas rotações ou reflexões – relacionar com o conceito de simetria.	• Tarefas *Reflexão, Translação e reflexão deslizante, Rotação, À procura da isometria com o GeoGebra* • Ficheiros com construções dinâmicas em GeoGebra • Espelhos e miras • Instrumentos de medição e desenho • Papel isométrico ponteado • Tarefas extra-aula: *À procura da isometria no papel, Construir o logotipo da Mitsubishi*	4
Figuras no espaço	**Sequência 6** • Representação do espaço no plano • Congruência no espaço	• Identificar diferentes formas de representação do espaço no plano: perspetiva cavaleira, perspetiva isométrica, perspetiva cónica e vistas. • Representar figuras 3D em papel isométrico e construir figuras a partir das suas representações; • Construir as vistas de cima, de frente e lateral de figuras 3D; • Analisar e construir planificações de sólidos;	• Tarefas *Representação de figuras 3D, Planificações do cubo* • Cubos encaixáveis; • Papel isométrico ponteado e quadriculado ponteado;	2

		• Compreender os desafios e as dificuldades inerentes à aprendizagem da construção e interpretação de representações no plano de figuras do espaço; • Identificar as capacidades de visualização envolvidas em atividades com figuras 3D.	• Tarefa extra-aula: *Vistas no ClicMat*	
	Sequência 7 • Sólidos geométricos • Prismas e pirâmides • Poliedros regulares • Outras famílias de sólidos (antiprismas, arquimedianos…)	• Distinguir poliedros de outros sólidos; • Conhecer famílias de poliedros (prismas, pirâmides, poliedros regulares, antiprismas, arquimedianos,...) • Caracterizar todas as propriedades dos prismas e das pirâmides; • Compreender e utilizar diferentes formas de organização de prismas a partir de critérios propostos e vice-versa; • Relacionar a classificação de quadriláteros com a classificação e definição de prismas; • Definir alguns prismas; • Investigar relações em famílias de poliedros. • Identificar as capacidades de visualização envolvidas em atividades com figuras 3D.	• Tarefas *Descobrir o critério, Prismas, Poliedros, Sólidos platónicos truncados.* • Modelos de sólidos geométricos • Polydrons • *Software* Poly • Tarefa extra: cubos pintados	5

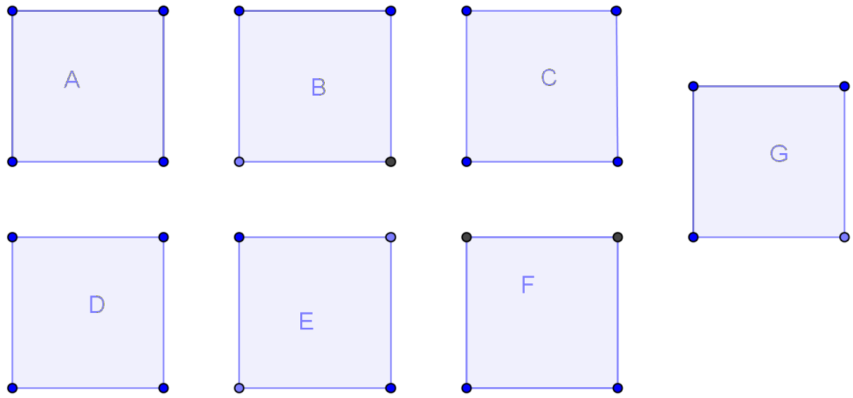
Anexo G. Tarefa “Propriedades dos quadriláteros”

1. As propriedades dos quadriláteros dizem respeito às características que estão sempre presentes em qualquer representante da sua classe. As propriedades mais comuns dizem respeito aos ângulos internos, posição relativa dos lados (paralelismo, perpendicularidade), dimensão relativa dos lados, dimensão e posição relativa das diagonais e existência de eixos de simetria. Abre os ficheiros GeoGebra “Propriedades…” e estuda os oito quadriláteros notáveis. Para cada um deles, identifica e regista todas as propriedades que se mantêm invariáveis quando os manipulamos.

	Lados	Ângulos	Diagonais	Eixos de simetria
Quadrado				
Retângulo				
Paralelogramo				
Papagaio				
Losango				
Trapézio				
Trapézio isósceles				
Trapézio retângulo				

2. Abre agora o ficheiro “Quadriláteros escondidos” onde poderás encontrar sete quadriláteros “disfarçados” de quadrados, seis deles são notáveis.

   a. Manipula os polígonos de forma a descobrires quais os quadriláteros que correspondem a cada letra.



   b. Houve algum par de quadriláteros que parecesse ter as mesmas propriedades? Em caso afirmativo, identifica esse par e as propriedades. O que te levou a distingui-los?

Anexo H. Tarefa "Classificação de quadriláteros e triângulos"

1. Preenche o diagrama de Venn (no verso) com os nomes dos quadriláteros que correspondem às propriedades identificadas.
2. Preenche o fluxograma (no verso) com o critério utilizado em cada caso. Consegues preenchê-lo usando critérios diferentes?
3. Compara as duas formas de organização anteriores:
   a. Indica duas relações entre quadriláteros que sejam evidenciadas em ambas.
   b. Indica duas relações que não sejam comuns.
   c. Acrescenta uma seta no fluxograma de forma para torná-lo mais completo.
4. Analisa agora as seguintes afirmações quanto à sua veracidade. Se forem falsas apresenta um contraexemplo, se forem verdadeiras justifica-as.
   a. Todos os quadrados são retângulos;
   b. Todos os paralelogramos são retângulos;
   c. Todos os quadrados são papagaios.

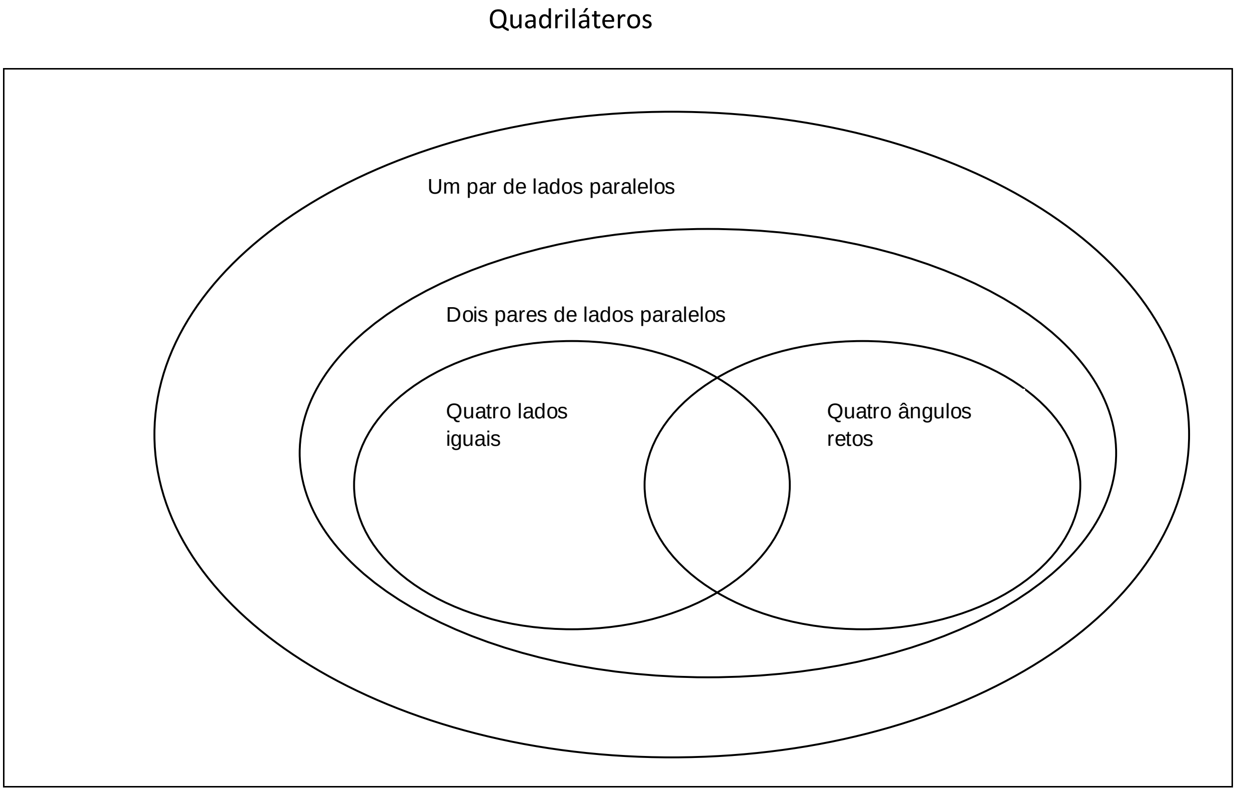
A professora Sofia realizou uma atividade com os seus alunos de 5.º ano sobre os dois tipos de classificação de triângulos: quanto a lados (equilátero, isósceles e escaleno) e quanto a ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo). Os alunos organizaram-se em grupos e colocaram vários triângulos de papel numa folha de cartolina, de forma a cumprirem os critérios apresentados. Na discussão coletiva, dois alunos fizeram os seguintes comentários acerca do trabalho de um grupo.

> "Aquele triângulo (A) devia estar no grupo dos triângulos equiláteros"
>
> "Aquele triângulo obtusângulo (B) está torto, têm de o pôr bem"

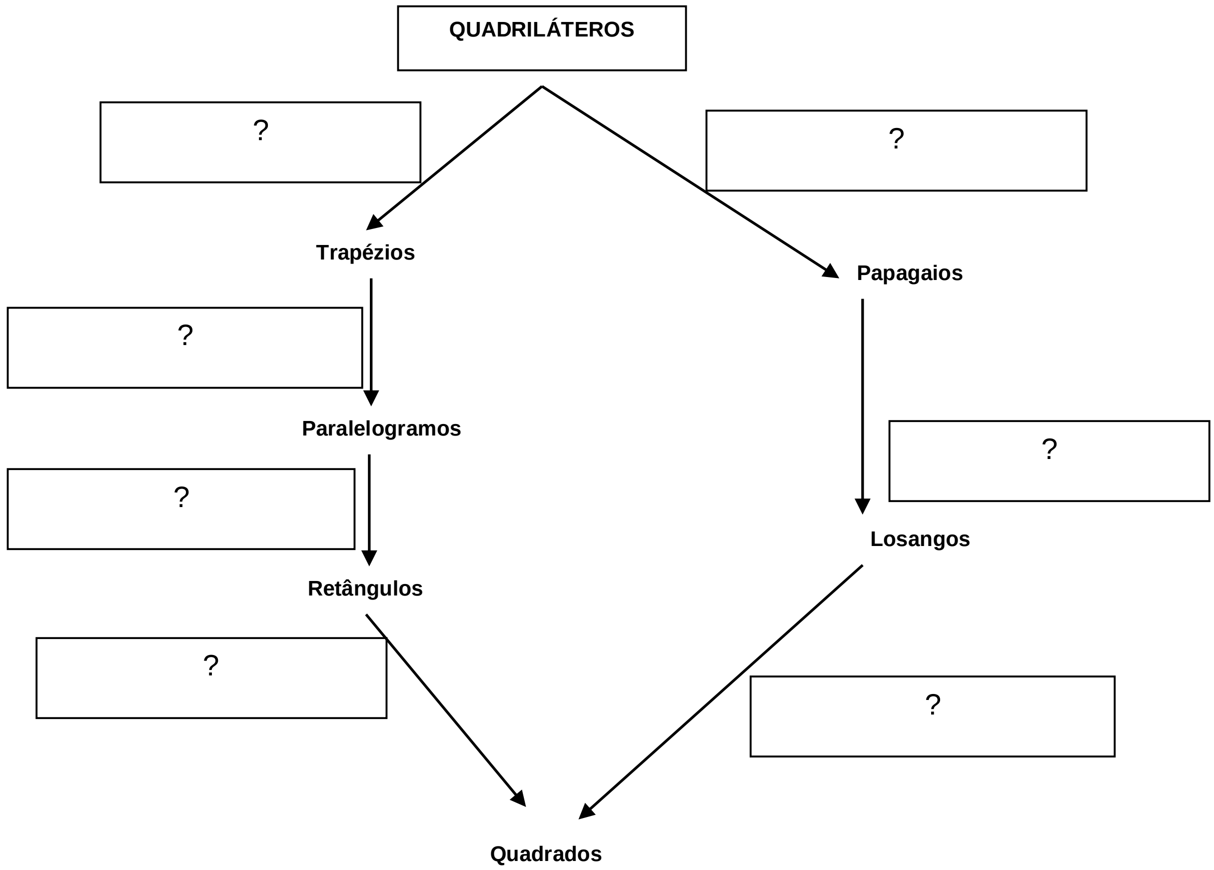
Comenta estas afirmações.

Fotos cedidas por Ana Sofia Janeiro (estudante de mestrado para Prof de 1.º e 2.º ciclos, ESELx)

Diagrama de Venn



Fluxograma



Anexo I. Tarefa "Definir quadriláteros"

Em geometria existem, frequentemente, várias maneiras de definirmos um objeto, estando ambas corretas. Podemos usar as relações entre os lados e os ângulos, mas também as suas diagonais, ou os eixos de simetria ou outros elementos. Por exemplo, se quisermos definir um quadrado, a definição tem de apresentar um conjunto de propriedades que todos os quadrados, e apenas os quadrados, respeitem. Além disso, normalmente os matemáticos constroem definições "económicas", ou seja, definições onde só se diz o estritamente necessário para que a figura que tem as propriedades apresentadas seja, exatamente, a figura pretendida. O que te propomos agora é que trabalhes sobre as definições de alguns quadriláteros, de forma a mantermos as relações estudadas nas atividades anteriores. Nota: Podes recorrer aos quadriláteros desenhados no verso.

1. Considera as seguintes definições para quadrado, propostas por um conjunto de futuros professores:

Definição A: Quadrilátero com todos os lados iguais, paralelos 2 a 2 e todos os ângulos iguais.

Definição B: Polígono com quatro lados e duas diagonais iguais.

   a. Parece-te que as definições são corretas?

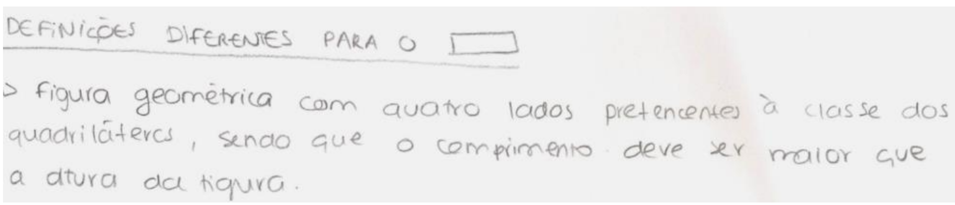
   b. Alguma das definições é correta e económica?

2. Propõe duas definições diferentes para retângulo.

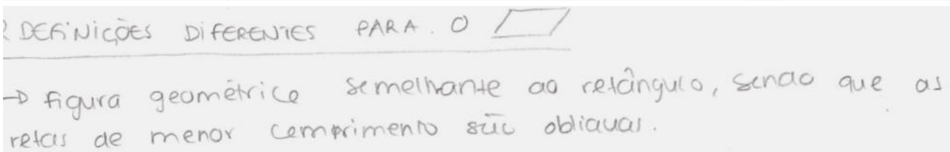
3. Propõe duas definições diferentes para papagaio.

4. Qual é o quadrilátero que pode ter como definição: "Quadrilátero com um único eixo de simetria que passa pelos pontos médios de dois lados opostos".

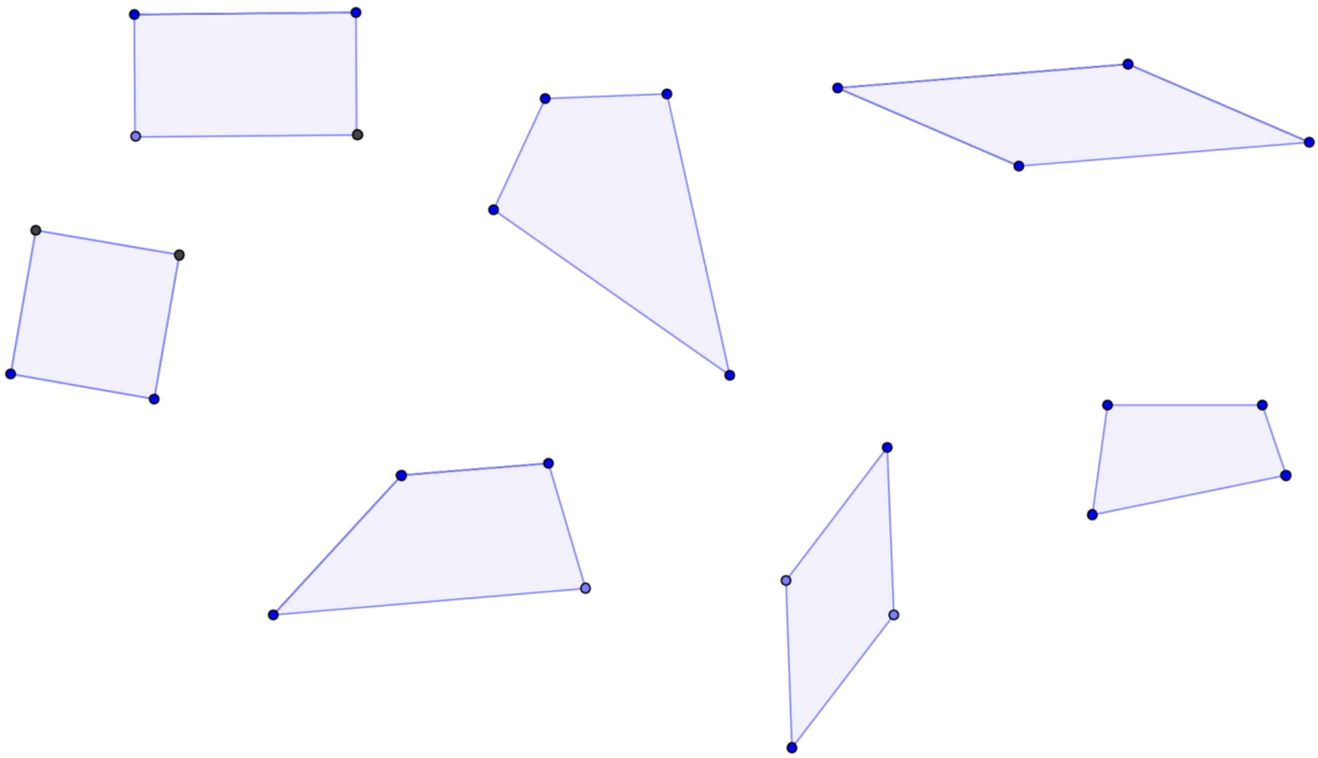
Considera as seguintes definições propostas para retângulo e paralelogramo, respetivamente. Comenta-as do ponto de vista da sua correção científica e do que podem representar do ponto de vista da aprendizagem das figuras geométricas.

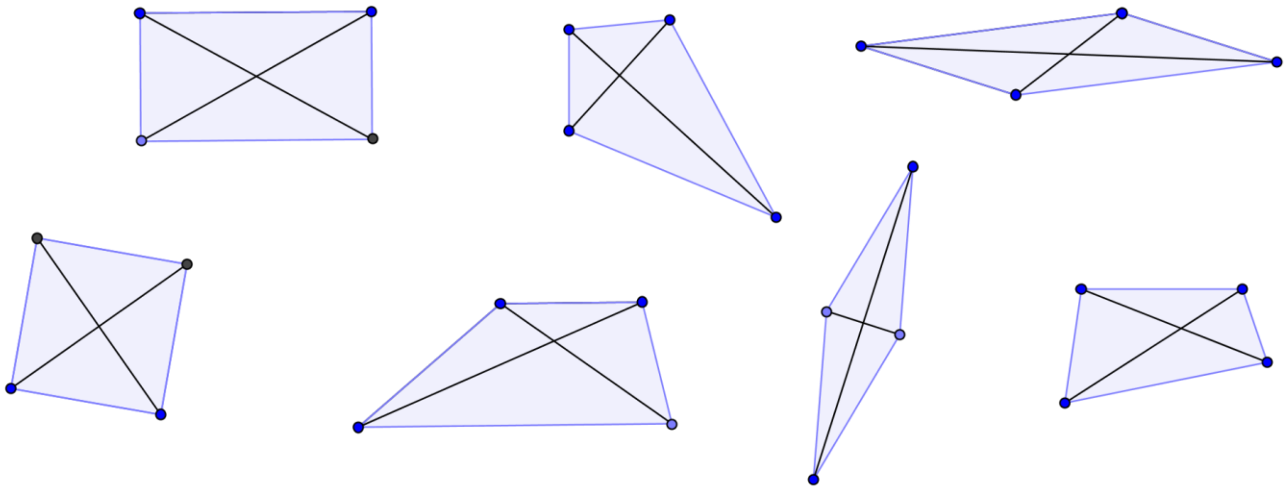

DEFINIÇÕES DIFERENTES PARA O

→ figura geométrica com quatro lados pretencentes à classe dos quadriláteros, sendo que o comprimento deve ser maior que a altura da figura.

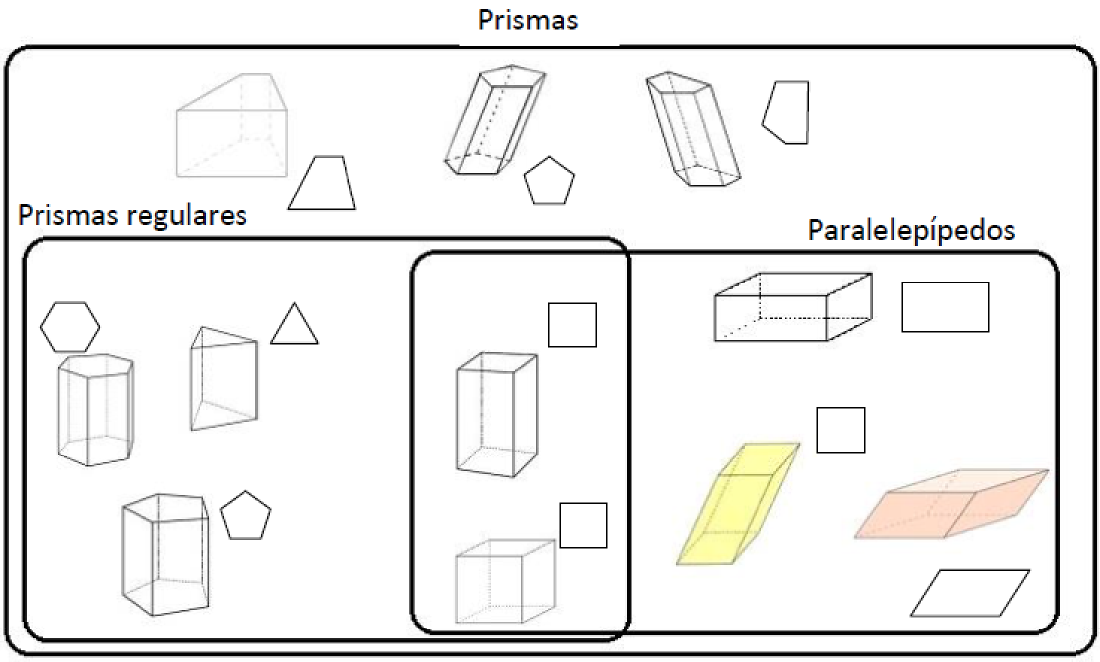

2 DEFINIÇÕES DIFERENTES PARA. O

→ figura geométrica semelhante ao retângulo, sendo que as retas de menor comprimento são obliquas.

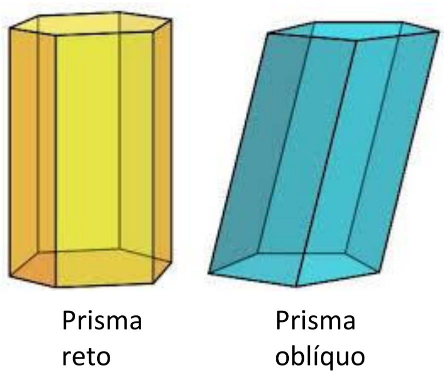




Anexo J. Tarefa “Prismas”



Um prisma é um poliedro que tem por base dois polígonos iguais e igualmente dispostos e cujos vértices estão unidos dois a dois por segmentos de reta paralelos entre si. Estes segmentos de reta definem assim um conjunto de faces laterais que são paralelogramos. De acordo com o número de lados do polígono da base, os prismas designam-se por: triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal...



O diagrama de Venn acima apresentado corresponde a uma possível organização para os prismas. Nele estão representados alguns prismas, juntamente com a representação no plano das suas bases.

Lê com atenção toda a informação apresentada de modo a responderes às seguintes questões:

1. No texto de apresentação sobre os prismas é dito que as faces laterais dos prismas são paralelogramos. Concordas com essa afirmação? Porquê?
2. Em que condições podemos dizer que um prisma é reto?

3. O que distingue os prismas regulares de outros prismas?

4. Segundo o diagrama de Venn, o cubo também é um prisma. Em que medida esta relação respeita a definição apresentada para prisma?

5. Os paralelepípedos pertencem também à classe dos prismas. Considera as seguintes propriedades anteriormente descobertas:
   - Poliedro com seis faces;
   - Poliedro com faces opostas iguais;
   - Poliedro com faces paralelas duas a duas;
   - Poliedro cujas faces são paralelogramos.

   Apresenta uma definição para paralelepípedo (procura usar uma definição económica).

6. Tendo em conta o diagrama de Venn apresentado, diz se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas e justifica a tua resposta:
   a. Os paralelepípedos são prismas regulares;
   b. Há prismas regulares que são paralelepípedos;
   c. Todos os prismas quadrangulares são paralelepípedos.

7. Um paralelepípedo retângulo é um paralelepípedo cujas faces são retângulos. Assinala no diagrama os exemplos de paralelepípedos retângulos.

8. Constrói um diagrama de Venn que inclua as seguintes classes de sólidos: prismas quadrangulares, cubos, paralelepípedos, prismas, paralelepípedos retângulos.

9. Indica duas relações que resultem da organização anterior.